IN THIS ISSUE

FORECAST OF UNEMPLOYMENT IN SWITZERLAND

In 1973, Switzerland counted 81 unemployed individuals out of an active population of 2'995'777. In December 1994 this figure rose to 171'038 persons out of 3'621'716. The difference between the unemployment rates of 0.003% in 1973 and 4.723% in 1994 shows the importance of the problem of unemployment in a small country such as Switzerland. In the first article of this issue, Béatrice Frey develops simple and easy to handle procedures for explaining unemployment in Switzerland. She proposes an ARIMA model and a procedure based on renewal theory for calculation of monthly forecasts of unemployment.

Béatrice Frey was born on May 7, 1959 in Offenburg, Germany. She obtained her Bachelor of Science in Economics in 1986 from the University of Freiburg in Germany. She received her postgraduate degree in Statistics from the University of Neuchâtel in 1993. She is currently a scientific collaborator of the sampling survey for the problem of Federal direct tax in the "Office fédéral des Contributions" in Berne.

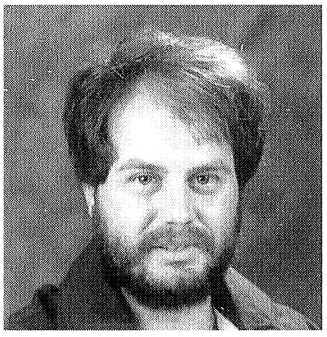
AXIOMATIC OF DESCRIPTIVE STATISTICS

Descriptive statistics deals with the concepts of location, dispersion, skewness and kurtosis of univariate distributions. How should one begin to study these notions? With regard to this question, Oja (1981) writes: we think that it is reasonable first to agree on what we mean by location, scale, skewness and kurtosis and only then try to find measures for them. Following the fundamental papers on the definitions of these types of measures by Bickel and Lehmann (1975, 1979) and Oja (1981), Valentin Rousson extends these notions in the second article, to data, in preserving the unity of the theoretical concepts developed by his predecessors in this field.

Valentin Rousson was born on November 10, 1967 in Neuchâtel. He obtained his Bachelor of Science in Mathematics from the University of Strasbourg, France, in 1992. He received his postgraduate degree in Statistics in 1994 from the University of Neuchâtel. Mr. Rousson is currently a research assistant with the Statistics Group at the University of Neuchâtel.

VALIDATION STUDIES IN EPIDEMIOLOGY

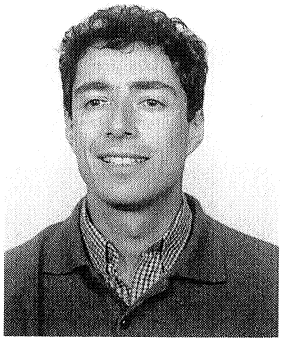
The third article in this issue treats two crucial problems related to the field of epidemiology: *precision* and *reproducibility* of an experiment. Ekkehardt Altpeter clarifies these two notions under the term validation, first by explaining the current state of the problem and then by using a real experiment concerning « the effect of short wave transmitter on sleeping disorder » to improve the available methods.



Ekkehardt Altpeter was born on August 11, 1960 in Hannover, Germany. In 1986, he received the Swiss Federal Diploma in Medecine and in 1991, he obtained his doctoral degree in Human Medecine from the University of Berne. Dr. Altpeter obtained his postgraduate degree in Statistics from the University of Neuchâtel in 1994. Currently, Dr. Altpeter is a research fellow at the Department of Social and Preventive Medecine in Berne.

IMAGE DU "MADE IN SWITZERLAND"

Made in Switzerland is already an established label for certain products on the world market such as watches and chocolate. In the last article of this issue, Hubert Brossard examines the perception that the Swiss opinion leaders have of this label in the field of services. Suprisingly, Swiss services are not found to be as much appreciated as its chocolate.



Hubert Brossard was born on June 9, 1965 in La Chaux-de-Fonds. He obtained his Bachelor of Science in Political Economics from the University of Neuchâtel in 1990. He received his postgraduate degree in Statistics in 1994 from the same University. Mr.Brossard is currently a research assistant with the Management Group at the University of Neuchâtel.

Editorial

In the ocean of journals covering almost all areas of pure and applied sciences, one may wonder why another. The answer is the same as that used to justify the previous journal: our new journal differs from others and caters for an as yet unsatisfied demand.

Publication is, to a young researcher submitting his or her very first paper, an almost insurmountable obstacle, inflated by any new author's lack of self confidence, and increased again, by the editor's lack of confidence in work from an unknown source.

Through the distorted spectacles of the young scientist the work of others is usually difficult, profound and intimidating, while his or her own research is the most trivial piece of writing imaginable. It is unfortunate for the novice writer that no statistics are available on the number of good papers that have never seen the light of publication. We see what is published but know far less of those rejected. How many Mozarts have been condemned? Assuming that the novice author can write at least moderately well, and that the material presented in the paper is of some value, publication should not be unduly hindered by the fact that the paper is the author's first.

While passengers on the plane are divided into three classes: first, business and economy, remember there exist travellers who never fly but still manage to complete their journey. Some, although they can afford the plane fare, even first class, do not fly because of their fear of the big machine. Some, ecofreaks and slowcoaches, embark on a twelve day train journey simply because they enjoy riding a train and viewing the scenery.

It is to those scientists, teachers, graduate students and practitioners who are not yet sitting on the plane but wish to travel, to publish their first article, that our newly established journal Student is addressed.

There is room for all tastes and much space for questions and answers. Come and join us for a train ride. If the pace does not satisfy you, then let us take a walk together. As was once said by the 11th century Persian philosopher Sohravardi: if you are a real pilgrim you will achieve the journey whichever way you go.

Neuchâtel, February 1995.
The Editor

Student (1995), Vol.1, No.1

Forecast of Unemployment in Switzerland

Béatrice Frey

Administration fédérale des contributions, division statistique et documentation, Berne, Switzerland

Abstract: The aim of this study is to develop procedures for the explanation unemployement in Switzerland, to compare the different procedures with each other and to find reliable short term forecasts. Two models will be presented : an ARIMA-model and a mathematical model based on renewal theory. Both procedures are simple and easy to handle and are able to produce monthly forecasts.

Key words: ARIMA model, forecasting, renewal theory, time series.

1 Introduction

Until recently unemployment was not an important topic in Switzerland. But since the summer of 1990 unemployment has dramatically increased. To successfully fight unemployment it is not only necessary to make a careful analysis of the actual situation, but also to have information about the future development. The aim of this study is to develop simple, easy to handle procedures for the explanation of unemployment in Switzerland, to compare the different procedures with each other and finaly to find a reliable short term forecasts. The orginal study contains three models: an econometric model, which allows quarterly forecasts, an ARIMA-model and a mathematical model based on renewal theory, which are both able to produce monthly predictions. In consideration of the novelty of monthly forecasts, only the ARIMA-model and the renewal theory model will be presented in this paper.

2 Unemployment in Switzerland

The Federal Office for Industry and Labour collects monthly unemployment figures since 1921. From January 1983 on, persons not only totally but also partially without work, are included in the unemployment figures. Therefore the period from 1983 until August 1992 (the time point, where the modeling of the data was finished) will be taken into account to avoid a structural break in the data.

According to Arbeitslosenversicherung (1992) and Bundesamt für Industrie, Gewerbe und Arbeit (1984), the population of unemployment persons comprises all persons seeking employment aged 15 years and over, who are registered at the communal employment office of their commune of residence, who:

- are out of work and are searching for a full-time or a part-time work,
- have already a part-time unemployment and who indicated that they would prefer to work more hours, for example they are looking for a further part-time or a full-time work (this part of the definition of unemployment was unique to Switzerland; since January 1993 these persons are not any longer taken into account),
- are able to take a job immediately.

In comparison with other countries, the unemployment rates in Switzerland were relatively low for a long period. From 1983 until 1990 the unemployment rates fluctuated near 1%. But since summer 1990 unemployment has dramatically increased. In August 1992, 94'851 unemployed persons were registered corresponding to an unemployment rate of 3,1% in contrast to 15'660 persons (unemployment rate: 0,5%) in June 1990, the lowest figure since 1983. The unemployment rate is obtained as the ratio of the number of unemployed persons to the total resident economically active population (3'091'694 persons) according to the Federal Population Census of 1980 - this applies throughout the study. The results of the Federal Population Census of 1990 were not yet available at the time point, where the modeling of the data was finished.

What has happened in Switzerland during the period 1983 until today which causes such a development of unemployment?

Switzerland has a labour market, which reacts exceptionally strong to cyclical movements. The number of the places of work is decreasing with declining economic growth and increasing with rising economic growth, which influences the level of unemployment. The relationship between the development of employment (respectively economic growth) and unemployment has become closer even more so in the last years. For about approximately forty per cent of the drop in the number of employed persons

resulted in unemployment during the last recession 1981/1984, meanwhile in the recent recession, which started at the end of 1990, the change in employment and unemployment equaled in absolute numbers. There are several reasons for this development: institutional switch overs, women are more integrated in the professional life than earlier, and the flexibility of the foreign labour supply has decreased.

3 ARIMA - Process

3.1 Theory

The unemployment figures, like a great deal of data in economics, occur in the form of time series, where the observations are not independent, but serially correlated and where the relations between consecutive observations are of interest. The body of techniques available for the analysis of such series is called time series analysis. The objective is to build stochastic models possessing simplicity and representational adequacy and to understand the stochastic mechanism that gives rise to an observed series. One of its main applications is to forecast future values of a series based on the history of the same series.

Time series models are associated in particular with the work of G.E.P. Box and G.M. Jenkins. They developed a model selection methodology based on three elements: identification, estimation and verification. If the model fails diagnostic checking the whole cycle is repeated until a satisfactory model is obtained - for more details see Box and Jenkins (1976).

The Box-Jenkins approach assumes that the realizations of a time sequence are generated from a linear stochastic process. The task of the time series analysis consists of modeling and quantifying this theoretical process.

The approach supposes that the dynamical behaviour of one economic variable is generated by a linear stochastic process - for more details see Cryer (1986). On the one hand this could be a pth-order autoregressive process (Z_t). Autoregressive processes are regressions on themselves. On the other hand the stochastic process could be a moving average process of order q. A combination of the autoregressive and moving average process is possible, that is, the series is partly autoregressive and partly moving average. We abreviate the process model as ARMA(p, q), which is valid if the time series is stationary, that is, has a constant mean over time. The idea of that condition is that the probability laws governing the process does not change with time (the process is in statistical equilibrium). Sta-

tionarity is a very strong condition to be imposed on a time series and is almost never true of series encountered in practice. The kind of nonstationarity may be characterized as being homogeneous in the sense that although the series moves freely without affinity for a particular location, its behaviour at different periods in time is essentially the same. Homogeneous nonstationarity is displayed by series whose differences or successive changes are stationary. If the first differences are nonstationary then one takes the second differences that are the differences on the first differences and so on. A series Z_t is said to follow an integrated autoregressive-moving average model if the dth difference is a stationary ARMA process. We say that Z_t is ARIMA(p, d, q).

Moreover, time series in economic reality show a seasonal pattern that means a tendency to repeat a pattern of behaviour over a seasonal period, generally one year. Seasonal series are characterized by a strong serial correlation with the seasonal lag, that is, the lag corresponding to the number of observations per seasonal period. An important tool in modeling nonstationary seasonal processes is the seasonal difference. Furthermore a process Z_t is said to be a multiplicative seasonal ARIMA model with nonseasonal orders p, d, and q, seasonal orders P, D, and Q, and seasonal period s if the differenced series satisfies an ARIMA$(p, d, q)(P, D, Q)s$ model.

The diagnostic tools for checking the process are the sample autocorrelation function and the sample partial autocorrelation function - for more details see Cryer (1986). Under the hypothesis that an autoregressive model is correct, the estimated partial autocorrelations at lags greater than p are approximately independently normally distributed with zero means and variance $1/n$. Thus $\pm 2n$ can be used as critical limits.

3.2 Application

Applying the different stages in the iterative approach to model building by using the MINITAB statistical system (see MINITAB INC (1989)), the monthly unemployment figures in Switzerland from January 1983 through August 1992 (see Table 1) follow a seasonal ARIMA (1,1,0)(0,1,0)12 model:

$$Z_t = (1 + 0.8515)Z_{t-1} - (0.8515)Z_{t-2} + Z_{t-12} - (1 + 0.8515)Z_{t-13} + (0.8515)Z_{t-14} + a_t$$

where a_t is an error term.

The equation shows that the unemployment figures for a given period are dependent on two non-seasonal and three seasonal lags, where the lags 1 and 13 have the greatest influence, which is quite reasonable.

Month	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
January	29'128	36'805	39'873	31'690	29'581	27'123	21'651	18'661	28'836	67'398
February	29'347	36'980	37'546	30'445	28'439	26'179	20'728	18'129	30'896	72'462
March	27'513	36'336	34'537	28'323	26'533	24'957	19'121	17'203	32'270	75'803
April	27'652	36'599	32'691	26'838	25'322	23'873	18'397	16'634	33'660	79'317
Mai	28'240	35'565	30'082	25'254	24'333	22'572	17'225	15'979	35'047	82'121
June	26'795	344'99	27'434	23'305	23'329	21'351	16'209	15'660	35'253	84'704
July	25'032	33'454	26'782	22'939	22'954	20'963	15'957	16'073	37'540	90'157
August	25'569	32'886	26'038	22'606	22'270	20'159	15'627	16'483	39'489	94'851
September	26'195	32'234	25'460	22'464	22'032	19'391	15'222	16'992	41'606	
October	27'147	33'055	25'705	23'005	22'403	19'316	15'466	18'670	45'692	
November	30'891	35'979	27'946	24'895	23'677	20'100	16'429	21'965	51'800	
December	32'252	37'824	30'044	26'805	25'203	21'004	17'392	25'141	58'580	

Table 1: Monthly unemployed figures: january 1983 through August 1992 (source: Federal office for Industry and Labour).

4 Mathematical model based on renewal theory

The mathematical model based on renewal theory can be regarded as a reduced form resulting from behavioural models relying on job search arguments, where the duration of unemployment plays a very important role (see Sheldon (1989)). The model is able to produce an "expected" number of unemployed persons. This indicator could be interpreted as a kind of adjustment path, which gives an idea of the future development. Moreover this model is able to predict monthly unemployment figures which come closer to the adjustment path. Due to the novelty of this model, the presentation of the approach will be more detailed.

4.1 Approach

Let us consider the stock of unemployed persons at a given time and introduce probabilities: Persons entering unemployment at the same time are forming a cohort. However the stock of unemployed persons at any time consists of different cohorts: those, which were already in the stock, that is, they entered unemployment i periods ago and others entering currently. At the end of each period a certain share of the members of a cohort leaves unemployment (exit rate), the other share remains in unemployment (transition rate).

- Assumptions

1) The overall period is subdivided into periods of length one and the length of each duration class corresponds to one period unit.
2) Transitions into the next higher duration class are controlled by the transition rate p_i, which indicates the probability at which a person moves to the next higher duration class, that is, remaining in the stock of unemployment. The transition probabilities are the result of a sorting process and completely describe the course of unemployment or the stock of unemployed persons at a given time.

3) The calculated indicators are expected values, that is, on average they correspond with the observed reality.

• First step

Let us consider any cohort k.

A. How big is the expected remainder stock $E(R_i)$ of members of the cohort k after i periods?

$$E(R_i) = n_k \cdot \prod_{j=0}^{i} p_j \tag{1}$$

where n_k is the size of the cohort k when entering unemployment in the period 0 and p_j are the transition probabilities for a specific duration class (with p_0, the probability of being a member of an inflow cohort, equals 1).

B. How big is the expected average completed duration of unemployment $E(D_k)$ for the members of the cohort k?

$$E(D_k) = \sum_{i=1}^{I+1} \prod_{j=1}^{i} p_{i-j} \cdot (1 - p_i) \tag{2}$$

where I is the highest duration class and $(1 - p_i)$ is the probability of finding employment, that is, leaving unemployment.

The inflows into and outflows from unemployment occur at the end of each period, so that the duration of unemployment for all the individuals leaving unemployment at the same period has the same length. The expected sum of spell lengths is calculated. Each spell length is calculated by the number of duration classes and weighted with the expected share of the members of a cohort, who pass i-1 duration classes and leave unemployment in the i th period.

The highest duration of unemployment is i periods, therefore p_{i+1} equals zero. Because $p_0 = 1$, equation (2) can be written as:

$$E(D_k) = \sum_{i=0}^{I} \prod_{j=0}^{i} p_j \tag{3}$$

• Second step

Let us consider multi cohorts.

However the stock of unemployed persons at time t is not only a combination of one cohort, that is, the recent inflows, but of a wealth of cohorts entering unemployment i periods ago.

The expected remaining stock of a cohort entering unemployment i periods ago at time t:

$$E(R_{t-i}) = n_{t-i} \cdot p_{t-i,0} \cdot p_{t-i+1,1} \cdot \ldots \cdot p_{t,i} \tag{4}$$

The expected stock of unemployed persons $E(U)$ at time t is the sum of the remaining stocks. The number of unemployed persons at a given time is determined by the current and past values of the specific duration transition risks:

$$E(U_t) = \sum_{i=0}^{I} n_{t-i} \prod_{j=0}^{i} p_{t-j,i-j} \tag{5}$$

- Third step

Let us consider the stationary renewal process.

Assuming a completely stationary labour market, where inflows into and outflows from unemployment occur at a constant rate and cancel out over a period of time, the number of unemployed persons will be constant. The calender time has no influence any more and equation (5) can be reduced as follows:

$$E(U) = \underbrace{n}_{1} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{I} \prod_{j=0}^{i} p_j}_{2} \tag{6}$$

Term 2 represents the average completed duration of unemployment (see equation (3)). Therefore $E(U) = n \cdot E(D)$ that is: $U = n \cdot D$ where U is the number of unemployed persons, n is the inflows per period, D is the average completed duration of unemployment in periods and $E(U)$ is the "expected" number of unemployed persons.

4.2 Application

Since January 1990 an electronic data processing placement system exists, which links all the Confederation's 26 cantons. This system secures a large amount of additional information on the characteristics of the totality of registered unemployed persons, notably on the duration of unemployment. A statistic about the stocks of unemployed persons from December 1991 until August 1992 is made (see Appendix A), where information on the length of unemployment is collected on those individuals unemployed at the time of each survey.

Let us consider the data concerning the month December 1991 (13'740 persons): the number of unemployed persons were splitted up into 24 cohorts according to their durations, that is 13'740 persons entered unemployment in December 1991 (therefore the corresponding duration class is zero), 11'900 persons were already in the stock one month (each month equals 30 days) ago and so on until 24 months were achieved, on the assumption that the most of the unemployed persons have left unemployment after two years. After that the transition probabilities from one month to another were calculated. For example 11'314 unemployed persons moved to the duration class 1 in January 1992 from the 13'740 members of the inflow cohort in December - the corresponding transition rate equals 0,82 (11'314/13'740) and the exit rate 0,18 (1-0,82).

According the implementations of section 4.1 the expected completed duration can be calculated as the sum of the product of the transition probabilities. The calculated indicator represents the expected completed duration, which the labour market situation of the considered month implies for each person entering unemployment, if the conditions remain steady. If we multiply the expected completed duration with the corresponding number of inflows, we get the "expected" number of unemployed persons. The assumption of stationarity is still required in any event. This indicator could be interpreted as a kind of adjustment path in the long run and gives an idea of the future development.

5 Forecasts

One of the primary objectives of building a model for a time series is to be able to forecast the values for that series at future times, which can provide a basis for economic planning.

5.1 Forecasts of the ARIMA-model

The predicted unemployment figures for the period September 1992 until August 1993, developped with the aid of the ARIMA-model, identified in section 3.2, are compared in Table 2 with the real unemployment figures, which are now available.

5.2 Forecasts of the mathematical model based on renewal theory

Refering to section 4.2 it is possible to calculate an "expected" unemployment figure (adjustment path) by multiplying the expected completed duration with the correponding number of inflows which the labour market

month	ex-ante forecast	lower	upper	real figures
9/92	99'305	97'809	100'801	102'081
10/92	105'381	102'233	108'529	109'073
11/92	113'184	108'207	118'160	120'080
12/92	121'407	114'508	128'305	129'643
1/93	131'453	122'590	140'316	141'514
2/93	137'563	126'727	148'398	151'018
3/93	141'794	129'000	154'589	155'182
4/93	146'067	131'342	160'792	157'425
5/93	149'516	132'899	166'134	160'435
6/93	152'649	134'182	171'116	165'290
7/93	158'570	138'302	178'838	169'009
8/93	163'663	141'642	185'683	172'069

Table 2: Forecasts

situation of each month implies, if the conditions remain steady. Dividing this calculated unemployment figure by the total resident economically active population, we get the "expected" unemployment rate. The question now is until when the adjustment path has been attained, if the labour market conditions remain steady? The answer is quite simple: we simulate the actual situation into the future. Referring to the data from April and August 1992 (see Appendix A) and simulating each labour market situation (see Appendix B) into future we get the results of Table 3. One could see that it takes a long time until the adjustment path has been reached. The adjustment goes on very quickly in the first three months and then always more slowly.

6 Conclusions

Comparing the monthly results of the forecasts of the ARIMA-model (see Table 2) with the official unemployment figures, one can see that the official figures are near to the upper 95 percent limits for all forecast periods. Since the ARIMA-model appeared to be very reliable in that application, this model is most suitable to make forecasts for the unemployment figures.

Comparing the monthly results of the mathematical model based on renewal theory, starting point April 1992, the expected unemployment figures are quite near to the real values. However the expected figures, starting point August 1992 are underestimated (see Table 3). The reason

	simulated unemployment figures from different starting points		real figures
	4/92	8/92	
adjustment path	101'383	121'366	
month			
5/92	82'226		82'121
6/92	84'948		84'704
7/92	87'395		90'157
8/92	89'582		94'851
9/92	91'490	98'684	102'081
10/92	93'138	102'156	109'073
11/92	94'564	105'162	120'080
12/92	95'798	107'763	129'643
1/93	96'836	110'014	141'514
2/93	97'686	111'936	151'018
3/93	98'457	113'589	155'182
4/93	99'116	114'997	157'425
5/93	99'639	116'190	160'435
6/93	100'106	117'223	165'290
7/93		118'118	169'009
8/93		118'840	172'069

Table 3: Simulations

may be that, perhaps August is not a suitable month for starting. As a rule the development of unemployment figures does change at the end of the summer period: the prospects of finding a job diminish and the unemployment rates increase with higher percentage rates as in the previous months. The assumption that the labour market conditions remain steady cannot be maintained for the following months. Thus it seems to depend on the season, whether the simulations could be used for reliable short term unemployment forecasts.

Altogether this leads to the following conclusions: all the two listed procedures are simple and easy to handle. None of the two models is perfect, but in our opinion the ARIMA-model is an acceptable model for the explanation of unemployment in Switzerland in the short run.

Résumé: Nous étudions l'évolution du chômage en Suisse. Deux approches statistiques du problème sont présentées et comparées: l'une est basée sur un modèle ARIMA et l'autre sur un modèle mathématique utilisant la théorie du renouvellement d'effectif. Ces deux modèles sont simples à utiliser et nous permettent d'établir des prévisions à court terme.

Mots clés: Modèle ARIMA, prévision, séries chronologiques, théorie du renouvellement d'effectif.

References

[1] Arbeitslosenversicherung: Bundesgesetz vom 25. Juni 1982, Verordnung vom 31. August 1983 (April 1992), Bern.

[2] Bundesamt für Industrie, Gewerbe und Arbeit (1984). "Die Grundlagen der schweizerischen Arbeitsmarktstatistik", Die Volkswirtschaft, 2.

[3] Cryer, J. D. (1986). Time Series Analysis, Boston.

[4] Jenkins, G. M. and Box, G. E. P (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control (rev. ed.), San Francisco.

[5] MINITAB INC, (1989). MINITAB Reference Manual Release 7, Data tech Industries, Inc., Valley Vorge.

[6] Sheldon, G. (1989). "Die Dynamik der Arbeitslosigkeit in der Schweiz". Publikation der Ausgleichsstelle für den Ausgleichfonds der Arbeitslosenversicherung, Bern.

Appendix A: Expected completed duration of unemployment

Concentration of unemployed persons over 24 months (nj)

Duration in months	12/91	01/92	02/92	03/92	04/92	05/92	06/92	07/92	08/92
0	13740	18860	15738	15363	15694	14465	14977	16960	16833
1	11900	11314	15725	12957	12680	13164	11937	12754	14533
2	8608	9503	9214	12689	10487	10431	10788	9946	10712
3	5692	7021	7881	7559	10437	8826	8755	9149	8465
4	3972	4805	5978	6528	6252	8837	7513	7542	7844
5	3350	3357	4182	5127	5478	5340	7622	6616	6578
6	2344	2904	2959	3653	4493	4789	4616	6779	5818
7	1982	2076	2565	2627	3253	3993	4172	4115	6083
8	1850	1753	1844	2282	2342	2871	3509	3692	3674
9	1191	1604	1560	1622	2032	2075	2540	3140	3274
10	964	1054	1386	1384	1453	1839	1873	2298	2812
11	1093	819	875	1202	1250	1318	1635	1691	2083
12	472	820	658	709	1030	1088	1138	1453	1488
13	410	358	636	511	604	908	968	1003	1270
14	258	304	287	493	439	533	759	787	844
15	162	210	247	253	418	401	433	616	645
16	112	138	174	210	219	363	352	359	518
17	67	95	118	142	187	191	323	294	301
18	57	49	81	103	125	166	174	275	251
19	52	48	38	68	93	117	146	138	227
20	42	42	43	35	58	87	106	130	114
21	33	34	39	35	32	52	75	91	114
22	23	29	30	34	31	30	46	65	73
23	34	22	26	25	31	26	26	41	56
24	13	25	18	23	23	27	23	24	39
l)	pj								
0		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1		0,82	0,83	0,82	0,83	0,84	0,83	0,85	0,86
2		0,80	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,83	0,84
3		0,82	0,83	0,82	0,82	0,84	0,84	0,85	0,85
4		0,84	0,85	0,83	0,83	0,85	0,85	0,86	0,86
5		0,85	0,87	0,86	0,84	0,85	0,86	0,88	0,87
6		0,87	0,88	0,87	0,88	0,87	0,86	0,89	0,88
7		0,89	0,88	0,89	0,89	0,89	0,87	0,89	0,90
8		0,88	0,89	0,89	0,89	0,88	0,88	0,88	0,89
9		0,87	0,89	0,88	0,89	0,89	0,88	0,89	0,89
10		0,88	0,86	0,89	0,90	0,91	0,90	0,90	0,90
11		0,85	0,83	0,87	0,90	0,91	0,89	0,90	0,91
12		0,75	0,80	0,81	0,86	0,87	0,86	0,89	0,88
13		0,76	0,78	0,78	0,85	0,88	0,89	0,88	0,87
14		0,74	0,80	0,78	0,86	0,88	0,84	0,81	0,84
15		0,81	0,81	0,88	0,85	0,91	0,81	0,81	0,82
16		0,85	0,83	0,85	0,87	0,87	0,88	0,83	0,84
17		0,85	0,86	0,82	0,89	0,87	0,89	0,84	0,84
18		0,73	0,85	0,87	0,88	0,89	0,91	0,85	0,85
19		0,84	0,78	0,84	0,90	0,94	0,88	0,79	0,83
20		0,81	0,90	0,92	0,85	0,94	0,91	0,89	0,83
21		0,81	0,93	0,81	0,91	0,90	0,86	0,86	0,88
22		0,88	0,88	0,87	0,89	0,94	0,88	0,87	0,80
23		0,96	0,90	0,83	0,91	0,84	0,87	0,89	0,86
24		0,74	0,82	0,88	0,92	0,87	0,88	0,92	0,95

Appendix A (continue)

Concentration of unemployed persons over 24 months (nj)

Duration in months	12/91	01/92	02/92	03/92	04/92	05/92	06/92	07/92	08/92
II)	Π pj								
0		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1		0,82	0,83	0,82	0,83	0,84	0,83	0,85	0,86
2		0,66	0,68	0,66	0,67	0,69	0,68	0,71	0,72
3		0,54	0,56	0,55	0,55	0,58	0,57	0,60	0,61
4		0,45	0,48	0,45	0,45	0,49	0,48	0,52	0,53
5		0,38	0,42	0,39	0,38	0,42	0,42	0,46	0,46
6		0,33	0,37	0,34	0,33	0,37	0,36	0,41	0,40
7		0,29	0,32	0,30	0,30	0,33	0,31	0,36	0,36
8		0,26	0,29	0,27	0,27	0,29	0,28	0,32	0,32
9		0,23	0,26	0,23	0,24	0,26	0,24	0,29	0,29
10		0,20	0,22	0,21	0,21	0,23	0,22	0,26	0,26
11		0,17	0,18	0,18	0,19	0,21	0,20	0,23	0,23
12		0,13	0,15	0,15	0,16	0,18	0,17	0,21	0,20
13		0,10	0,11	0,11	0,14	0,16	0,15	0,18	0,18
14		0,07	0,09	0,09	0,12	0,14	0,13	0,15	0,15
15		0,06	0,07	0,08	0,10	0,13	0,10	0,12	0,12
16		0,05	0,06	0,07	0,09	0,11	0,09	0,10	0,10
17		0,04	0,05	0,05	0,08	0,10	0,08	0,08	0,09
18		0,03	0,05	0,05	0,07	0,09	0,07	0,07	0,07
19		0,03	0,04	0,04	0,06	0,08	0,06	0,06	0,06
20		0,02	0,03	0,04	0,05	0,08	0,06	0,05	0,05
21		0,02	0,03	0,03	0,05	0,07	0,05	0,04	0,04
22		0,01	0,03	0,03	0,04	0,06	0,04	0,04	0,04
23		0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,04	0,03	0,03
24		0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,03	0,03	0,03
Sum = expected completed duration		5,91	6,37	6,17	6,46	7,00	6,66	7,17	7,21

Source: Federal Office for Industry and Labour

Appendix B

Simulation of the number of unemployed persons in the long run, starting period: April 1992

Duration in months	pj	4/92	5/92	6/92	7/92	8/92	9/93	10/92	11/92	12/92	1/93	2/93	3/93	4/93	5/93	6/93
0	1.00	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694	15694
1	0.83	12680	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953	12953
2	0.81	10487	10263	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484	10484
3	0.82	10437	8626	8441	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623	8623
4	0.83	6252	8632	7134	6982	7132	7132	7132	7132	7132	7132	7132	7132	7132	7132	7132
5	0.84	5478	5246	7244	5987	5859	5985	5985	5985	5985	5985	5985	5985	5985	5985	5985
6	0.88	4493	4801	4598	6348	5246	5134	5245	5245	5245	5245	5245	5245	5245	5245	5245
7	0.89	3253	4001	4275	4094	5653	4672	4572	4671	4671	4671	4671	4671	4671	4671	4671
8	0.89	2342	2900	3567	3811	3650	5040	4165	4076	4164	4164	4164	4164	4164	4164	4164
9	0.89	2032	2085	2582	3176	3394	3250	4488	3709	3630	3708	3708	3708	3708	3708	3708
10	0.90	1453	1820	1868	2313	2845	3040	2912	4020	3322	3251	3321	3321	3321	3321	3321
11	0.90	1250	1312	1644	1687	2089	2570	2746	2630	3631	3001	2937	3000	3000	3000	3000
12	0.86	1030	1071	1125	1409	1446	1790	2202	2353	2253	3111	2571	2516	2571	2571	2571
13	0.85	604	877	913	958	1200	1232	1525	1876	2004	1920	2650	2191	2144	2190	2190
14	0.86	439	519	754	784	823	1031	1058	1310	1612	1722	1649	2277	1882	1842	1881
15	0.85	418	372	440	639	665	698	874	897	1111	1366	1460	1398	1931	1596	1561
16	0.87	219	362	322	381	553	575	604	757	777	962	1183	1264	1210	1671	1381
17	0.89	187	195	322	287	339	493	512	538	674	692	856	1053	1125	1078	1488
18	0.88	125	165	172	284	253	299	434	451	473	593	609	754	927	991	949
19	0.90	93	113	149	155	256	228	270	392	407	428	536	550	681	837	894
20	0.85	58	79	96	127	132	218	195	230	334	347	365	457	469	581	714
21	0.91	32	53	73	88	116	121	200	178	210	305	318	333	418	429	531
22	0.89	31	28	47	64	78	103	107	177	158	186	270	281	295	370	380
23	0.91	31	28	26	43	59	71	94	98	161	144	170	247	256	269	337
24	0.92	23	29	26	24	39	54	65	86	90	148	132	156	227	236	248
Sum		**79141**	**82226**	**84948**	**87395**	**89582**	**91490**	**93138**	**94564**	**95798**	**96835**	**97686**	**98457**	**99116**	**99639**	**100106**
Rate		**2.6**	**2.7**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**	**3.0**	**3.1**	**3.1**	**3.1**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**

Expected duration of unemployment * inflows in April 1992: 6,46 * 15'694 = 101'383 unemployed persons (unemployment rate:3,3%)

		3.2	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**	**3.2**

Appendix B (continue)

Simulation of the number of unemployed persons in the long run, starting period: August 1992

Duration in months	pj	8/92	9/92	10/92	11/92	12/92	1/93	2/93	3/93	4/93	5/93	6/93	7/93	8/93	9/93	10/93
0	1.00	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833	16833
1	0.86	14533	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424	14424
2	0.84	10712	12206	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115	12115
3	0.85	8465	9117	10389	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311	10311
4	0.86	7844	7258	7817	8907	8840	8840	8840	8840	8840	8840	8840	8840	8840	8840	8840
5	0.87	6578	6841	6330	6817	7768	7710	7710	7710	7710	7710	7710	7710	7710	7710	7710
6	0.88	5818	5785	6016	5566	5995	6831	6780	6780	6780	6780	6780	6780	6780	6780	6780
7	0.90	6083	5221	5191	5399	4995	5380	6130	6084	6084	6084	6084	6084	6084	6084	6084
8	0.89	3674	5431	4661	4634	4820	4460	4803	5473	5432	5432	5432	5432	5432	5432	5432
9	0.89	3274	3258	4816	4133	4110	4274	3955	4259	4853	4817	4817	4817	4817	4817	4817
10	0.90	2812	2932	2918	4313	3702	3680	3828	3542	3814	4346	4314	4314	4314	4314	4314
11	0.91	2083	2549	2658	2645	3910	3355	3336	3470	3210	3457	3940	3910	3910	3910	3910
12	0.88	1488	1833	2243	2339	2327	3440	2953	2936	3053	2825	3042	3467	3441	3441	3441
13	0.87	1270	1301	1602	1960	2044	2034	3007	2581	2566	2669	2469	2659	3030	3007	3007
14	0.84	844	1069	1094	1348	1650	1720	1712	2530	2172	2159	2246	2078	2238	2550	2531
15	0.82	645	692	876	897	1105	1352	1410	1403	2074	1780	1770	1840	1703	1834	2090
16	0.84	518	542	582	737	754	929	1137	1185	1180	1744	1497	1488	1548	1432	1542
17	0.84	301	434	455	488	618	632	779	953	994	989	1462	1255	1248	1298	1201
18	0.85	251	257	371	388	416	527	540	665	814	849	844	1248	1071	1065	1108
19	0.83	227	207	212	306	320	344	435	446	549	672	700	697	1030	884	879
20	0.83	114	188	171	175	253	265	284	359	368	454	555	579	576	851	731
21	0.88	114	100	164	150	154	222	232	249	315	323	398	487	507	505	746
22	0.80	73	91	80	132	120	123	178	186	200	253	259	319	390	407	405
23	0.86	56	63	79	69	114	104	106	153	160	172	218	223	275	336	351
24	0.95	39	53	60	75	66	108	99	101	146	153	164	207	212	261	320
Sum		**94649**	**98684**	**102156**	**105162**	**107763**	**110014**	**111936**	**113589**	**114997**	**116190**	**117223**	**118118**	**118840**	**119443**	**119922**
Rate		**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.6**	**3.7**	**3.7**	**3.8**	**3.8**	**3.8**	**3.8**	**3.9**	**3.9**

Expected duration of unemployment * inflows in August 1992: 7,21 * 16'833 = 121'366 unemployed persons (unemployment rate:3,9%)

	3.9	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**	**3.9**

Student (1995), Vol.1, No.1

Axiomatique et Statistique Descriptive

Valentin Rousson

Groupe de Statistique, Université de Neuchâtel, Suisse

Résumé: Nous nous intéressons aux notions fondamentales utilisées en statistique descriptive que sont les mesures de centre, les mesures de dispersion et les mesures d'asymétrie d'une distribution. Bickel et Lehmann (1975, 1979) et Oja (1981) ont proposé des axiomes qui définissent mathématiquement ces trois notions. Oja (1981) a mis en évidence les liens remarquables qui les unissent si l'approche est limitée au cadre (d'une partie) des distributions continues. Notre propos est de voir comment on peut étendre ces axiomes au cadre des distributions discrètes, plus particulièrement au cadre des ensembles de données, tout en préservant cette unité.

Mots clés: Axiomatique, convexité généralisée, mesure d'asymétrie, mesure de centre, mesure de dispersion, transformation affine d'une distribution.

1 Introduction

Plusieurs types de fonctions, appelées mesures descriptives, sont utilisés en statistique descriptive pour résumer une distribution. L'espérance mathématique et la médiane sont dites des mesures de centre (ou de tendance centrale) d'une distribution, alors que l'écart-type et l'intervalle interquartile en sont des mesures de dispersion. On rencontre aussi des mesures d'asymétrie ou encore des mesures d'aplatissement. Tout ceci est bien connu, mais ce qui l'est moins, ce sont les définitions mathématiques de ces notions. Qu'est ce qu'au juste une mesure de centre et une mesure

de dispersion? Quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour être appelées ainsi? Par exemple, quelles propriétés mathématiques partagent l'espérance et la médiane? Quels sont leurs points communs, ou plus généralement, quels sont les points communs à toutes les mesures de centre? Ce sont des questions d'axiomatique qu'il s'agit de discuter.

Bickel et Lehmann (1975, 1979) proposent un système d'axiomes qui définit ce qu'est une mesure de centre et un système d'axiomes qui définit ce qu'est une mesure de dispersion. Oja (1981) en fait de même pour définir ce qu'est une mesure d'asymétrie. Ces trois systèmes d'axiomes présentent d'intéressants liens entre eux (que nous discutons au paragraphe 5) si l'approche est limitée aux distributions continues (du moins à certaines d'entre elles, voir note 1.3); c'est pourquoi nous présentons ces axiomatiques dans ce cadre, comme l'a fait Oja (1981), dans les paragraphes 2 à 4. A partir du paragraphe 6, nous tentons de traduire ces axiomatiques dans le cadre des ensembles de données, tout en essayant de conserver les résultats remarquables vus au paragraphe 5. Nous ne définirons pas d'autres types de mesures descriptives d'une distribution (telles des mesures d'aplatissement) et nous expliquons pourquoi dans la conclusion.

Pour commencer nous introduisons quelques notations qui nous accompagneront tout au long de cet article:

Note 1.1: Nous nous intéressons uniquement aux distributions réelles et univariées. Nous identifions une distribution F à sa fonction de répartition associée $F(x)$.

Note 1.2: Nous notons S_F le support d'une distribution continue F, c'est-à-dire l'ensemble $\{x : 0 < F(x) < 1\}$.

Note 1.3: Nous désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des distributions continues dont les fonctions de répartition associées sont strictement croissantes sur leurs supports.

Note 1.4: Nous désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des distributions discrètes dont les fonctions de répartition associées ne présentent qu'un nombre fini de sauts. Ces distributions peuvent être considérées comme des ensembles de données (voir paragraphe 6).

Note 1.5: Soit X une variable aléatoire (v.a.) distribuée selon une distribution F. La distribution $aF + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ est par définition la distribution que suit la v.a. $Y = aX + b$. Nous parlons alors de transformation affine d'une distribution. Plus généralement, la distribution $f(F)$ est par définition la distribution que suit la v.a. $f(X)$.

Note 1.6: La fonction "réciproque" d'une distribution F est définie par $F^{-1}(x) := \inf\{y : F(y) \geq x\}$. Lorsque la distribution F appartient à $\mathcal{C}$, on

a alors $F^{-1}(F(x)) = x$ si $x \in S_F$ et $F(F^{-1}(x)) = x$ si $x \in]0;1[$ ($F(x)$ est bijective et $F^{-1}(x)$ est sa fonction réciproque au sens usuel).

Note 1.7: Soient X et Y deux v.a. suivant respectivement les distributions F et G de $\mathcal{C}$. Il est possible de définir une fonction Δ telle que $X + \Delta(X) = Y$ en posant $\Delta(x) = \Delta_{FG}(x) := G^{-1}(F(x)) - x$ [Doskum, 1974]. Cette fonction $\Delta(x)$ est définie sur S_F; elle représente la distance horizontale entre $F(x)$ et $G(x)$ au point x comme le montre la figure 1.

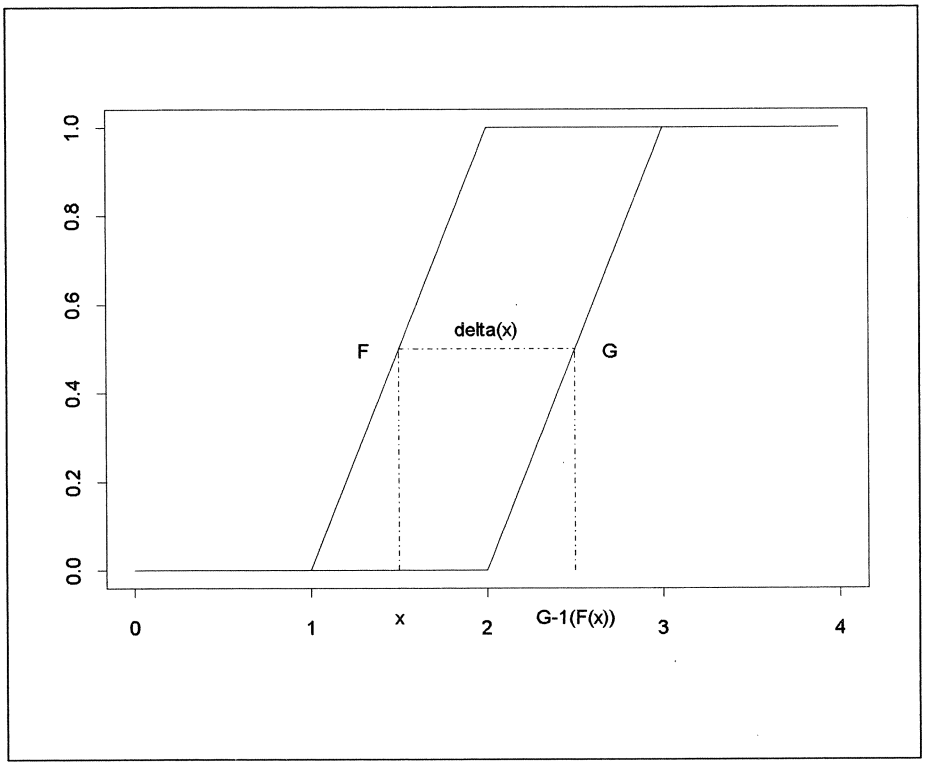


Figure 1: Distance horizontale entre $F(x)$ et $G(x)$ au point x.

2 Axiomatique d'une mesure de centre

Bickel et Lehmann (1975) proposent l'axiomatique suivante pour définir une mesure de centre:

Définition 2.1: Une fonction $c : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure de centre sur $\mathcal{C}$ si pour tout F et G de $\mathcal{C}$:

(C1) $c(aF+b) = a \cdot c(F) + b \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.
(C2) $c(-F) = -c(F)$.
(C3) $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in S_F \Longrightarrow c(F) \leq c(G)$.

D'après les axiomes (C1) et (C2), une mesure de centre est en quelque sorte une fonction linéaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$ (bien que $\mathcal{C}$ ne soit pas un espace vectoriel). Ceci a pour conséquence que si F est une distribution symétrique par rapport à un nombre μ, on a $c(F) = \mu$ pour toute mesure de centre c (le centre d'une distribution symétrique est ainsi défini de façon unique).

L'axiome (C3) met en exergue le rôle d'une mesure de centre qui est avant tout (comme l'est celui de toute mesure descriptive) de comparer deux (ou plusieurs) distributions. Cet axiome exige en effet d'une mesure de centre qu'elle préserve dans $\mathbf{R}$ un certain ordre partiel dans $\mathcal{C}$ (un ordre partiel étant une relation réflexive, antisymétrique et transitive) que Oja (1981) désigne par $\leq_0$:

Définition 2.2: $F \leq_0 G \Longleftrightarrow F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in S_F$.

L'axiome (C3) s'en trouve traduit comme suit:

(C3) $F \leq_0 G \Longrightarrow c(F) \leq c(G)$.

Par ailleurs, on a l'équivalence suivante:

Résultat 2.1: $F \leq_0 G \Longleftrightarrow \Delta(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_F$.

L'espérance mathématique $\mu(F) = \int_0^1 F^{-1}(x)dx$ et la médiane $m(F) = F^{-1}(1/2)$ vérifient les axiomes (C1), (C2) et (C3); partant, ce sont des mesures de centre d'une distribution F. Ce n'est pas le cas du mode $M(F)$ (le point où la pente de $F(x)$ est maximale) qui ne satisfait pas (C3). Plus généralement, les deux classes de fonctions suivantes sont constituées de mesures de centre [Doskum, 1975]:

• $\mu_\alpha(F) := \frac{1}{1-2\alpha} \int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(x)dx$, où $0 \leq \alpha < 1/2$
(pour $\alpha = 0$, on a l'espérance).

• $m_\alpha(F) := \frac{1}{2}(F^{-1}(\alpha) + F^{-1}(1-\alpha))$, où $0 < \alpha \leq 1/2$
(pour $\alpha = 1/2$, on a la médiane).

3 Axiomatique d'une mesure de dispersion

Bickel et Lehmann (1979) proposent l'axiomatique suivante pour définir une mesure de dispersion:

Définition 3.1: Une fonction $d : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure de dispersion sur $\mathcal{C}$ si pour tout F et G de $\mathcal{C}$:

(D1) $d(aF+b) = a \cdot d(F) \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.

(D2) $d(-F) = d(F)$.
(D3) $F^{-1}(v) - F^{-1}(u) \leq G^{-1}(v) - G^{-1}(u) \quad \forall 0 < u < v < 1$
$\Longrightarrow d(F) \leq d(G)$.

D'après les axiomes (D1) et (D2), une mesure de dispersion est une fonction invariante par translation qui prend ses valeurs dans $\mathbf{R}^+$.

L'axiome (D3) concerne la comparaison des dispersions entre distributions. A ce propos, Oja (1981) introduit la relation $\leq_1$ suivante:

Définition 3.2: $F \leq_1 G \Longleftrightarrow F^{-1}(v) - F^{-1}(u) \leq G^{-1}(v) - G^{-1}(u)$
$\forall 0 < u < v < 1$.

L'axiome (D3) s'en trouve traduit comme suit:

(D3) $F \leq_1 G \Longrightarrow d(F) \leq d(G)$.

Par ailleurs, on a l'équivalence suivante:

Résultat 3.1: $F \leq_1 G \Longleftrightarrow \Delta$ croissante sur S_F.

L'écart-type $\sigma(F) = \sqrt{\mu(F - \mu(F))^2}$ et l'intervalle interquartile $IQ(F)$ $= F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$ vérifient les axiomes (D1), (D2) et (D3); partant, ce sont des mesures de dispersion d'une distribution F. Ce n'est pas le cas de la variance $\sigma^2(F)$ qui ne satisfait pas (D1). Plus généralement, les deux classes de fonctions suivantes sont constituées de mesures de dispersion [Bickel et Lehmann, 1979]:

• $\sigma_p(F) := (\mu|X_1 - X_2|^p)^{1/p}$, où $p > 0$ et où X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes distribuées selon F (pour $p = 2$, on a un multiple de l'écart-type).

• $I_\alpha(F) := F^{-1}(\alpha) - F^{-1}(1 - \alpha)$, où $1/2 < \alpha < 1$
(pour $\alpha = 3/4$, on a l'intervalle interquartile).

On peut en outre montrer que si k est un nombre réel strictement positif et d une mesure de dispersion, alors $d'(F) := k \cdot d(F)$ est encore une mesure de dispersion d'une distribution F.

Note 3.1: Dans un premier temps, Bickel et Lehmann (1976) ont proposé un système d'axiomes définissant uniquement ce qu'est une mesure de dispersion pour les distributions symétriques. Il est également composé de trois axiomes: les deux premiers sont identiques à (D1) et (D2) mais le troisième, que nous notons ici par (D3'), est différent de (D3):

(D3') $F^{-1}(v) - F^{-1}(1/2) \leq G^{-1}(v) - G^{-1}(1/2) \quad \forall 1/2 < v < 1$
$\Longrightarrow d(F) \leq d(G)$.

On peut montrer que si F est symétrique, on a (D3')$\Longrightarrow$(D3), ce qui veut dire qu'une mesure de dispersion au sens de cette axiomatique-là l'est encore au sens de la définition 3.1.

4 Axiomatique d'une mesure d'asymétrie

Oja (1981) définit la relation $\leq_2$ comme suit:

Définition 4.1: $F \leq_2 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe sur S_F.

Puis il propose l'axiomatique suivante pour définir une mesure d'asymétrie:

Définition 4.2: Une fonction $e : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure d'asymétrie sur $\mathcal{C}$ si pour tout F et G de $\mathcal{C}$:

(E1) $e(aF + b) = e(F) \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.
(E2) $e(-F) = -e(F)$.
(E3) $F \leq_2 G \Longrightarrow e(F) \leq e(G)$.

D'après les axiomes (E1) et (E2), une mesure d'asymétrie est invariante (au signe près) par transformation affine. Ceci a pour conséquence que si F est une distribution symétrique, on a $e(F) = 0$ pour toute mesure d'asymétrie e.

L'axiome (E3), relatif à la comparaison de l'asymétrie de deux distributions, fait pour sa part appel à la relation $\leq_2$ qui est (tout comme $\leq_1$) un préordre partiel sur $\mathcal{C}$ (nous appelons un préordre partiel une relation réflexive et transitive); cette relation, désignée par $\leq_e$, a été introduite pour la première fois par Van Zwet (1964).

Le moment centré et standardisé d'ordre trois $\sqrt{\beta_1(F)} = \mu(F - \mu(F))^3 / \sigma^3(F)$ satisfait les axiomes (E1), (E2) et (E3) [Van Zwet, 1964]; partant, c'est une mesure d'asymétrie d'une distribution F. Groeneveld et Meeden (1984) proposent pour leur part trois mesures d'asymétrie basées sur le coefficient d'asymétrie de Yule $CY(F) = (F^{-1}(3/4) + F^{-1}(1/4) - 2m(F))/IQ(F)$. Par contre, le coefficient d'asymétrie de Pearson $CP(F) = (\mu(F) - m(F))/\sigma(F)$ ne satisfait pas (E3) est n'est donc pas une mesure d'asymétrie au sens de la définition 4.2 [Van Zwet, 1964, Mac Gillivray, 1986].

5 Liens entre ces trois axiomatiques

Oja (1981) lie les axiomes (C3), (D3) et (E3) en utilisant la notion de convexité d'ordre k d'une fonction [Karlin 1968, Karlin et Ziegler, 1976]. En effet, les (pré)ordres partiels $\leq_0$, $\leq_1$ et $\leq_2$ que font intervenir ces axiomes peuvent être caractérisés comme suit (en traduisant les résultats 2.1, 3.1 et la définition 4.1):

Résultat 5.1: $F \leq_0 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe d'ordre 0 (i.e. positive) sur S_F.
Résultat 5.2: $F \leq_1 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe d'ordre 1 (i.e. croissante) sur S_F.
Résultat 5.3: $F \leq_2 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe d'ordre 2 (i.e. convexe) sur S_F.

On peut en plus déceler des liens entre les axiomes (C3), (D3) et (E3) d'une part, et les axiomes (C1), (D1) et (E1) d'autre part. On a en effet les équivalences suivantes [Oja, 1981]:

Résultat 5.4: $F \leq_0 G$ et $G \leq_0 F$ (on note alors $F =_0 G$) $\Longleftrightarrow G = F$.
Résultat 5.5: $F \leq_1 G$ et $G \leq_1 F$ (on note alors $F =_1 G$)
$\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R} : G = F + b$.
Résultat 5.6: $F \leq_2 G$ et $G \leq_2 F$ (on note alors $F =_2 G$)
$\Longleftrightarrow \exists a > 0, b \in \mathbf{R} : G = aF + b$.

Ceci implique par (D3) et (E3):

Résultat 5.7: Si d est une mesure de dispersion, $d(F+b) = d(F) \quad (\forall b \in \mathbf{R})$.
Résultat 5.8: Si e est une mesure d'asymétrie, $e(aF + b) = e(F)$
$(\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.

Le premier de ces résultats est un cas particulier de (D1) (le cas où $a = 1$), alors que le second est exactement (E1) (ainsi (E3) $\Longrightarrow$ (E1), et le système d'axiomes proposé à la définition 4.2 est redondant). Autrement dit, si les axiomatiques d'une mesure de centre c, d'une mesure de dispersion d et d'une mesure d'asymétrie e n'étaient composées que de leurs troisièmes axiomes respectifs, on aurait la situation suivante (avec $a > 0, b \in \mathbf{R}$):

- $e(F)$ connu $\Longrightarrow e(aF + b)$ connu.
- $d(F)$ connu $\Longrightarrow d(aF + b)$ connu seulement pour $a = 1$.
- $c(F)$ connu $\Longrightarrow c(aF + b)$ inconnu.

Les mesures de centre, de dispersion et d'asymétrie n'informeraient pas de la même manière sur les effets d'une transformation affine d'une distribution. Les axiomes (C1) et (D1) sont d'une certaine façon présents pour rétablir l'équilibre. Grâce à eux, en effet, la connaissance de $c(F)$ et $d(F)$ impliquent aussi la connaissance de $c(aF+b)$ et de $d(aF+b)$, tout comme la connaissance de $e(F)$ implique aussi, par l'axiome (E3), la connaissance de $e(aF + b)$.

Les axiomes (C2), (D2) et (E2) nous informent quant à eux sur les conséquences d'une transformation affine d'une distribution avec un $a < 0$. Ils sont aussi liés d'une certaine façon aux axiomes (C3), (D3) et (E3). En effet, on peut montrer que les trois hypothèses des implications logiques que constituent (C3), (D3) et (E3) peuvent être caractérisées comme suit:

Résultat 5.9: $F \leq_0 G \Longleftrightarrow (-G) \leq_0 (-F)$.
Résultat 5.10: $F \leq_1 G \Longleftrightarrow (-F) \leq_1 (-G)$.
Résultat 5.11: $F \leq_2 G \Longleftrightarrow (-G) \leq_2 (-F)$.

Et d'après les axiomes (C2), (D2) et (E2), les trois conclusions de ces implications logiques peuvent être caractérisées comme suit:

Résultat 5.12: $c(F) \leq c(G) \Longleftrightarrow c(-G) \leq c(-F)$.
Résultat 5.13: $d(F) \leq d(G) \Longleftrightarrow d(-F) \leq d(-G)$.
Résultat 5.14: $e(F) \leq e(G) \Longleftrightarrow e(-G) \leq e(-F)$.

Notre conclusion est que ces axiomes sont remarquablement bien choisis. Ils forment un tout simple, esthétique et cohérent. En particulier, leur solidarité est exemplaire et nous doutons qu'une axiomatique d'un quatrième type de mesures descriptives puisse préserver cette harmonie (voir paragraphes 11 et 12).

6 Ensembles de données et distributions discrètes

Soit $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble de n données réelles que l'on a rangées par ordre croissant, comme nous le ferons tout au long de cet article (en définissant par ailleurs $x_r := x_i + (x_{i+1} - x_i)(r - i)$ si $i < r < i + 1$). On a les définitions suivantes:

- $\mu(E) = (\sum x_i)/n$ (l'espérance ou moyenne arithmétique de E).
- $m(E) = x_{(n+1)/2}$ (la médiane de E).
- $\sigma(E) = \sqrt{(\sum (x_i - \mu(E))^2)/n}$ (l'écart-type de E).

Le lien entre ces définitions et celles du même nom que l'on rencontre dans le cadre des distributions est évident. A partir d'un tel ensemble E, on peut en effet définir une distribution discrète F, telle que si X est une v.a. distribuée selon F, on ait: $P\{X = x_i\} = 1/n \quad \forall 1 \leq i \leq n$. Si l'ensemble est fini, cette distribution F est un élément de $\mathcal{D}$. On a alors $\mu(E) = \mu(F)$, $m(E) = m(F)$ et $\sigma(E) = \sigma(F)$, où $\mu(F)$, $m(F)$ et $\sigma(F)$ sont les définitions habituelles de l'espérance mathématique, de la médiane et de l'écart-type d'une distribution discrète F. Comme ces caractéristiques descriptives sont les mêmes pour l'ensemble E et pour la distribution F, il semble pertinent d'associer une distribution discrète (de $\mathcal{D}$) à un ensemble de données (l'ensemble est ainsi vu comme une population et non comme un échantillon!). En pareil cas, nous noterons simplement $F = \{x_1, ..., x_n\}$.

Note 6.1: Dans un ensemble de données il est possible que plusieurs éléments coïncident (notons au passage que le terme "ensemble" n'est, dans ce cas, plus vraiment approprié, car un ensemble en mathématique n'est pas censé contenir plusieurs fois le même élément). La distribution discrète F associée à un tel ensemble n'est alors plus uniforme. Si par exemple une certaine valeur x apparaît m fois dans un ensemble à n éléments, on aura $P\{X = x\} = m/n$ (où X est une v.a. distribuée selon F).

Note 6.2: Plusieurs ensembles de données peuvent être associés à la même distribution discrète. Par exemple, les ensembles $A = \{1,2\}$ et $B = \{1,1,2,2\}$ sont associés à la distribution F, telle que si X est une v.a. distribuée selon F, on ait $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = 1/2$. Ces ensembles ont bien même moyenne, même médiane et même écart-type.

Note 6.3: On voudra d'une mesure de centre, d'une mesure de dispersion et d'une mesure d'asymétrie d'un ensemble de données que ce soient des fonctions qui justement ne varient pas entre les différents ensembles associés à la même distribution discrète. On dira de telles fonctions qu'elles sont n-invariantes. Remarquons par exemple que l'écart-type échantillonal d'un ensemble E, $s(E) = \sigma(E)\sqrt{n/(n-1)}$, ne pourra pas être consideré comme une mesure de dispersion car (en reprenant A et B comme dans la note 6.2) $0.71 \simeq s(A) \neq s(B) \simeq 0.58$.

Note 6.4: Pour obtenir la transformation affine $aE + b$ d'un ensemble de données E, il suffit d'effectuer cette même transformation affine sur chacun des éléments de E. Par exemple, si $E = \{1,2,3\}$, alors $2E + 1 = \{3,5,7\}$ et $-E = \{-3,-2,-1\}$. Plus généralement, si $E = \{x_1,...,x_n\}$, alors $f(E) = \{f(x_1),...,f(x_n)\}$ (en réarrangeant éventuellement les $f(x_i)$ par ordre croissant).

7 La fonction Δ pour les ensembles de données

Notre but est de voir comment se traduisent dans le cadre des ensembles de données (c'est-à-dire dans le cadre de $\mathcal{D}$) les axiomatiques d'une mesure de centre, d'une mesure de dispersion et d'une mesure d'asymétrie vues dans le cadre des distributions continues de $\mathcal{C}$. Le fait est que certaines équivalences vues dans $\mathcal{C}$ ne sont plus valables dans $\mathcal{D}$ (la raison étant principalement que les fonctions de répartition ne sont pas bijectives dans $\mathcal{D}$). Par exemple, en gardant les mêmes définitions pour la relation $\leq_1$ (voir définition 3.2) et pour la fonction Δ (voir note 1.7) vues dans $\mathcal{C}$, on n'a plus dans $\mathcal{D}$ le résultat 3.1. En effet, si $F = \{1,2\}$ et $G = \{1,3\}$, on peut vérifier que $F \leq_1 G$; pourtant $\Delta(1) = 0$ et $\Delta(1.5) = -0.5$ (d'où Δ n'est pas croissante). Afin d'essayer de conserver dans $\mathcal{D}$ tous les résultats vus dans $\mathcal{C}$ qui étaient à la base des liens entre axiomatiques, nous pensons qu'il faut redéfinir la fonction Δ pour les ensembles de données.

Définition 7.1:

• Soient $F = \{x_1,...,x_n\}$ et $G = \{y_1,...,y_n\}$ deux ensembles de données à n éléments, nous définissons la fonction $\Delta = \Delta_{FG}$ en posant simplement $\Delta(x_i) := y_i - x_i$.

• Si $F = \{x_1, ..., x_n\}$ et $G = \{y_1, ..., y_m\}$ avec $n \neq m$, on se ramène au cas de deux ensembles de taille identique (cette taille étant le plus petit commun multiple à m et à n, voir note 6.2). Par exemple si $F = \{1, 2\}$ et $G = \{1, 2, 3\}$, on écrit $F = \{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ et $G = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$, puis on définit la fonction Δ comme ci-dessus.

Note 7.1: La fonction Δ n'est ainsi définie que pour les x se trouvant dans l'ensemble F. Par exemple, si $F = \{1, 2\}$, $\Delta(1.5)$ n'est pas défini.

Note 7.2: Lorsque plusieurs éléments coïncident dans F, cette fonction Δ n'est plus à proprement parler une fonction. En effet, si $F = \{1, 1\}$ et $G = \{2, 4\}$, on a à la fois $\Delta(1) = 2 - 1 = 1$ et $\Delta(1) = 4 - 1 = 3$.

Note 7.3: C'est pourtant la seule manière de définir une "fonction" Δ, telle que si X est une v.a. distribuée selon F et Y une v.a. distribuée selon G, on ait $X + \Delta(X) = Y$.

Note 7.4: Cette manière de procéder fait également intervenir les distances horizontales entre fonctions de répartition. Par exemple, si $F = \{1, 2\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ et $G = \{2, 4, 6\} = \{2, 2, 4, 4, 6, 6\}$, on a $\Delta(1) = 1$ (2 fois), $\Delta(1) = 3$, $\Delta(2) = 2$, $\Delta(2) = 4$ (2 fois); et ces nombres $(1, 3, 2, 4)$, comme le montre la figure 2, représentent bien toutes les distances horizontales possibles entre les fonctions de répartition $F(x)$ et $G(x)$.

Note 7.5: Si on définit les relations $\leq_0$ et $\leq_1$ dans $\mathcal{D}$ comme dans $\mathcal{C}$, on peut montrer que l'on a bien avec cette nouvelle définition de Δ: $F \leq_0 G \Longleftrightarrow \Delta$ positive et $F \leq_1 G \Longleftrightarrow \Delta$ croissante. Nous définissons d'autre part dans $\mathcal{D}$ (comme dans $\mathcal{C}$) la relation $\leq_2$ comme suit: $F \leq_2 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe. De cette manière, tous les résultats vus au paragraphe 5 seront conservés dans $\mathcal{D}$.

Note 7.6: Pour accentuer encore les similitudes entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ en ce qui concerne la fonction Δ, nous proposons de définir le support S_F d'une distribution discrète F de $\mathcal{D}$ par son ensemble de données associé. Ainsi $S_F = \{x : P\{X = x\} \neq 0\}$, où X est une v.a. distribuée selon F. La fonction Δ est alors comme dans $\mathcal{C}$ définie sur S_F.

8 Mesure de centre d'un ensemble de données

Avec cette nouvelle définition de la fonction Δ, on a la situation suivante dans $\mathcal{D}$, où $F = \{x_1, ..., x_n\}$ et $G = \{y_1, ..., y_n\}$ sont deux ensembles de données (nous garderons ces notations jusqu'à la fin de l'article):

Résultat 8.1:

$F \leq_0 G \Longleftrightarrow \Delta(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_F \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n.$

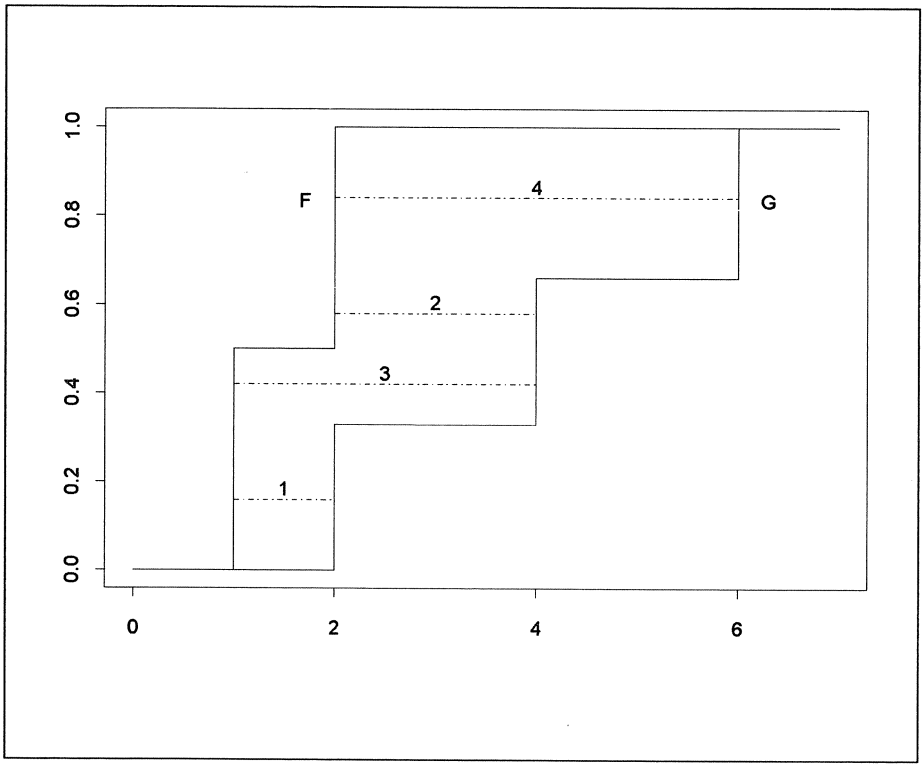


Figure 2: Toutes les distances horizontales entre F et G.

La définition d'une mesure de centre d'un ensemble de données peut dès lors être exprimée comme suit (traduction de la définition 2.1):

Définition 8.1: Une fonction n-invariante $c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure de centre sur $\mathcal{D}$ si pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x_1 \leq ... \leq x_n$ et $y_1 \leq ... \leq y_n$ de $\mathbf{R}$:

(C1) $c(ax_1 + b, ..., ax_n + b) = a \cdot c(x_1, ..., x_n) + b \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.
(C2) $c(-x_n, ..., -x_1) = -c(x_1, ..., x_n)$.
(C3) $x_i \leq y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n \Longrightarrow c(x_1, ..., x_n) \leq c(y_1, ..., y_n)$.

En utilisant cette définition, on peut vérifier que la moyenne arithmétique $\mu(F)$ et la médiane $m(F)$ sont des mesures de centre d'un ensemble de données F. Par contre le mode $M(F)$ (la valeur la plus représentée dans F, qui ne satisfait pas (C3)), la moyenne harmonique $H(F) = n/\sum(1/x_i)$ et la moyenne géométrique $G(F) = (\prod x_i)^{1/n}$ (qui ne satisfont pas (C1)), le minimum $\min(F) = x_1$ et le maximum $\max(F) = x_n$ (qui ne satisfont pas (C2)) n'en sont pas.

Exemple 8.1: Voyons que le mode ne satisfait pas (C3). Soient $F = \{1, 2, 3, 3\}$ et $G = \{2, 2, 3, 5\}$. On a $F \leq_0 G$ (tous les x_i sont plus petits ou égaux à leurs y_i respectifs); pourtant le mode de F (qui vaut 3) est plus grand que le mode de G (qui vaut 2).

Note 8.1: Le fait que le minimum et le maximum d'un ensemble de données satisfont (C1) et (C3) mais pas (C2) pourrait nous inciter à définir une mesure de position (comme concept plus général qu'une mesure de centre) d'un ensemble de données comme étant une fonction n-invariante de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant simplement (C1) et (C3).

9 Mesure de dispersion d'un ensemble de données

Voyons à présent comment on peut caractériser la relation $\leq_1$ dans $\mathcal{D}$. On a la situation suivante:

Résultat 9.1:

$F \leq_1 G \Longleftrightarrow \Delta$ croissante sur $S_F \Longleftrightarrow \Delta(x_i) \leq \Delta(x_j) \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$
$\Longleftrightarrow \Delta(x_i) \leq \Delta(x_{i+1}) \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \Longleftrightarrow x_{i+1} - x_i \leq y_{i+1} - y_i$
$\forall 1 \leq i \leq n-1$.

Cette dernière formulation nous dit qu'il suffit de considérer la suite des différences entre éléments successifs (nous dirons par la suite "différences successives") des ensembles F et G pour savoir si l'on a oui ou non $F \leq_1 G$.

Exemple 9.1: Soient $F = \{1, 2, 4\}$ et $G = \{4, 5, 8\}$. Les différences successives de F valent 1 et 2; comme elles sont respectivement plus petites ou égales à celles de G qui valent 1 et 3, on a $F \leq_1 G$.

La définition d'une mesure de dispersion d'un ensemble de données peut dès lors être exprimée comme suit (traduction de la définition 3.1):

Définition 9.1: Une fonction n-invariante $d : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure de dispersion sur $\mathcal{D}$ si pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x_1 \leq ... \leq x_n$ et $y_1 \leq ... \leq y_n$ de $\mathbf{R}$:

(D1) $d(ax_1 + b, ..., ax_n + b) = a \cdot d(x_1, ..., x_n) \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.
(D2) $d(-x_n, ..., -x_1) = d(x_1, ..., x_n)$.
(D3) $x_{i+1} - x_i \leq y_{i+1} - y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \Longrightarrow d(x_1, ..., x_n) \leq d(y_1, ..., y_n)$.

En utilisant cette définition, on peut vérifier que l'écart-type $\sigma(F)$ et l'intervalle interquartile $IQ(F) = Q_3(F) - Q_1(F) = x_{(n+3)/4} - x_{(3n+1)/4}$ sont des mesures de dispersion d'un ensemble de données F. Il en va de même de l'étendue $ET(F) = x_n - x_1$, mais pas de la variance $\sigma^2(F)$ qui ne satisfait pas (D1).

10 Mesure d'asymétrie d'un ensemble de données

Voyons à présent comment on peut caractériser la relation $\leq_2$ dans $\mathcal{D}$. On a la situation suivante:

Résultat 10.1:

$F \leq_2 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe sur S_F
$\Longleftrightarrow \frac{\Delta(x_j)-\Delta(x_i)}{x_j-x_i} \leq \frac{\Delta(x_k)-\Delta(x_j)}{x_k-x_j} \quad \forall 1 \leq i < j < k \leq n$
$\Longleftrightarrow \frac{\Delta(x_{i+1})-\Delta(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \leq \frac{\Delta(x_{i+2})-\Delta(x_{i+1})}{x_{i+2}-x_{i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2$
$\Longleftrightarrow \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \leq \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2.$

Exemple 10.1: Soient $F = \{1,3,5,6\}$ et $G = \{0,3,9,13\}$. Les différences successives de F valent 2, 2 et 1; celles de G valent 3, 6 et 4. On effectue alors les quotients 3/2, 6/2 et 4/1. Comme cette suite de quotients est croissante, on a $F \leq_2 G$.

Note 10.1: Lorsque l'on rencontre dans cette liste de quotients un 0/0, cela correspond au cas où l'on a pour un certain i: $x_i = x_{i+1}$ et $\Delta(x_i) = \Delta(x_{i+1})$. On a alors deux fois le même couple $(x_i, \Delta(x_i))$ et ceci n'influence pas la convexité de Δ. On peut dès lors biffer ce 0/0 de la liste. Lorsque l'on y rencontre un $a/0$, il doit être considéré comme infini (avec $a/0 = b/0$ si $a \neq b$). La figure 3 justifie ces principes en illustrant l'exemple 10.2: on voit bien que le polygone composé des sommets $(x_i, \Delta(x_i))$ est convexe.

Exemple 10.2: Soient $F = \{-1,1,1,4,4,4\}$ et $G = \{2,2,2,5,8,9\}$. Les différences successives valent 2, 0, 3, 0, 0 pour F et 0, 0, 3, 3, 1 pour G. La liste de quotients à considérer est alors: 0/2, 0/0, 3/3, 3/0 et 1/0. En biffant le 0/0, cela donne: 0, 1, ∞, ∞. Comme cette suite est croissante, on a $F \leq_2 G$.

La définition d'une mesure d'asymétrie d'un ensemble de données peut dès lors être exprimée comme suit (traduction de la définition 4.2):

Définition 10.1: Une fonction n-invariante $e : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une mesure d'asymétrie sur $\mathcal{D}$ si pour tout $n \geq 3$ et pour tout $x_1 \leq ... \leq x_n$ et $y_1 \leq ... \leq y_n$ de $\mathbf{R}$:

(E1) $e(ax_1 + b, ..., ax_n + b) = e(x_1, ..., x_n) \quad (\forall a > 0, b \in \mathbf{R})$.
(E2) $e(-x_n, ..., -x_1) = -e(x_1, ..., x_n)$.
(E3) $\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \leq \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n-2 \Longrightarrow e(x_1, ..., x_n) \leq e(y_1, ..., y_n)$.

En utilisant cette définition, on peut vérifier que le coefficient (d'asymétrie) de Yule $CY(F) = (Q_3(F) + Q_1(F) - 2m(F))/IQ(F)$ est une mesure d'asymérie d'un ensemble de données F. Par contre, ce n'est pas le cas du coefficient (d'asymétrie) de Pearson $CP(F) = (\mu(F) - m(F))/\sigma(F)$ qui ne satisfait pas (E3).

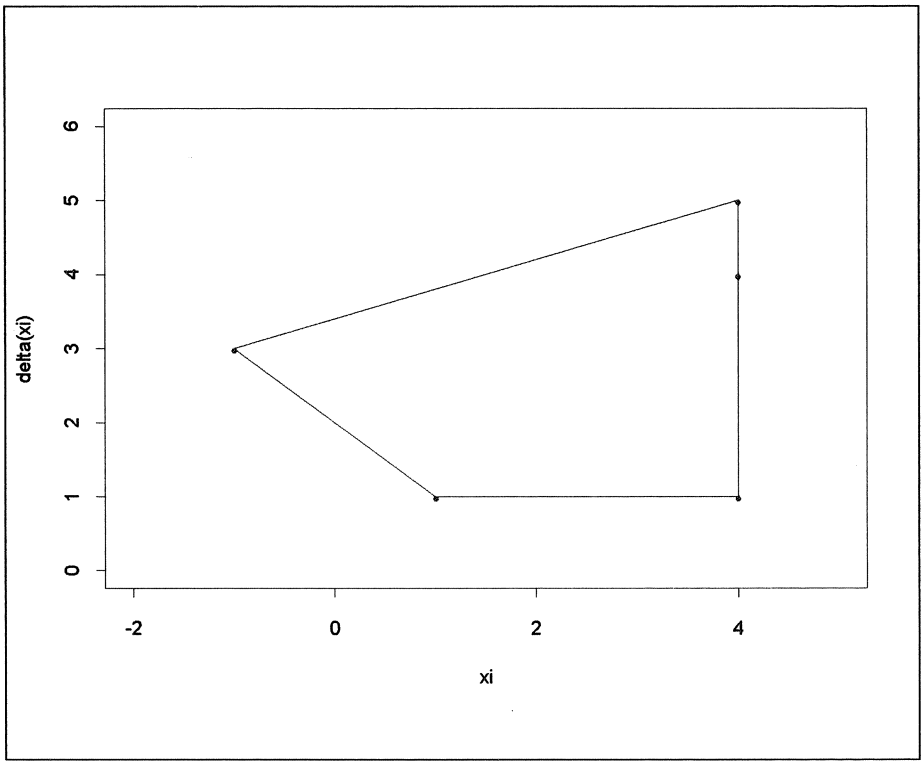


Figure 3: Polygone formé des $(x_i, \Delta(x_i))$ de l'exemple 10.2.

Exemple 10.3: Voyons que le coefficient de Pearson ne satisfait pas (E3). Soient $F = \{1,2,3,3,3\}$ et $G = \{1,4,9,9,9\}$. Les différences successives de F valent 1, 1, 0, 0 et celles de G valent 3, 5, 0, 0. La suite de quotients à considérer est alors composée de 3 et de 5. Comme elle est croissante, on a $F \leq_2 G$; pourtant $CP(F) = -0.75$ est plus grand que $CP(G) \simeq -0.78$.

11 La relation $\leq_3$

Les axiomatiques des mesures de centre, de dispersion et d'asymétrie font respectivement appel aux relations $\leq_0$, $\leq_1$ et $\leq_2$. Si on désire maintenant axiomatiser un nouveau type de mesures descriptives, il semble naturel de vouloir utiliser la relation $\leq_3$ définie comme suit:

Définition 11.1: $F \leq_3 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe d'ordre 3 sur S_F.

Rappelons à ce propos le concept de convexité d'ordre 3:

Définition 11.2: On dit qu'une fonction f est convexe d'ordre 3 sur un intervalle I si [Karlin, 1968]:

$$Det = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(x) & f(y) & f(z) & f(t) \end{vmatrix} \geq 0 \quad \forall x < y < z < t \in I.$$

En développant ce déterminant, on obtient l'équivalence suivante:

Résultat 11.1: $Det \geq 0 \Longleftrightarrow m_{yz} \leq \alpha \cdot m_{xy} + \beta \cdot m_{zt}$
où $\alpha = \frac{t-y}{(t-y)+(z-x)}$, $\beta = 1 - \alpha$ et $m_{ab} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dans $\mathcal{D}$, on a alors l'équivalence suivante:

Résultat 11.2:
$F \leq_3 G \Longleftrightarrow \Delta$ convexe d'ordre 3 sur $S_F \Longleftrightarrow$
$m_{jk} \leq \alpha \cdot m_{ij} + \beta \cdot m_{kl} \quad \forall 1 \leq i < j < k < l \leq n$
où $\alpha = \frac{x_l - x_j}{(x_l - x_j)+(x_k - x_i)}$, $\beta = 1 - \alpha$ et $m_{ab} = \frac{\Delta(x_b)-\Delta(x_a)}{x_b - x_a}$.

Exemple 11.1: Soient $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $G = \{1, 8, 27, 64\}$. Comme F et G n'ont que 4 éléments, il n'y a qu'une seule possibilité pour i, j, k et l ($i = 1, j = 2, k = 3, l = 4$). On a alors $\alpha = \beta = 0.5$, $m_{12} = 6$, $m_{23} = 18$ et $m_{34} = 36$. Comme $18 \leq (0.5) \cdot 6 + (0.5) \cdot 36 = 21$, on a $F \leq_3 G$.

Il est ensuite intéressant de se demander sous quelles conditions on a à la fois $F \leq_3 G$ et $G \leq_3 F$ (on note alors $F =_3 G$). Une première hypothèse est que l'on ait cette propriété lorsque $G = F^2$. Voyons deux exemples avec justement $G = F^2$: un premier où l'on a effectivement $F =_3 G$, et un second ou cette propriété n'est pas vérifiée.

Exemple 11.2: Soit $F = \{1, 2, 3, 5\}$ et soit $G = F^2 = \{1, 4, 9, 25\}$. On a $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.4$, $m_{12} = 2$, $m_{23} = 4$ et $m_{34} = 7$. Comme $4 = (0.6) \cdot 2 + (0.4) \cdot 7$, on a à la fois $F \leq_3 G$ et $G \leq_3 F$ (et donc $F =_3 G$).

Exemple 11.3: Soit $F = \{-1, 0, 2, 3\}$ et soit $G = F^2 = \{0, 1, 4, 9\}$ (souvenons-nous qu'on range les éléments d'un ensemble par ordre croissant). Ici $\alpha = \beta = 0.5$, $m_{12} = 0$, $m_{23} = 0.5$ et $m_{34} = 4$. Or, comme $0.5 < (0.5) \cdot 0 + (0.5) \cdot 4 = 2$, on a $F \leq_3 G$ mais pas $G \leq_3 F$ (et donc pas $F =_3 G$).

Ceci implique le résultat suivant:

Résultat 11.3: Il n'existe pas de fonction f telle que $F =_3 G$
$\Longleftrightarrow G = f(F)$.

12 Conclusion

Nous constatons que, moyennant la redéfinition de la fonction Δ pour les ensembles de données, les axiomatiques des mesures de centre, de dispersion et d'asymétrie proposées par Bickel et Lehmann (1975, 1979) et par Oja (1981) vues dans le cadre (d'une partie) des distributions continues sont tout-à-fait exportables aux ensembles de données. Tout ce que l'on a vu à ce propos dans $\mathcal{C}$ est en effet encore valable dans $\mathcal{D}$. En particulier, on a toujours dans $\mathcal{D}$ les propriétés qui font que ces trois systèmes d'axiomes sont remarquablement bien alignés.

Ces systèmes sont même tellement bien alignés que nous ne pensons pas qu'il existe un autre type de mesures descriptives se trouvant sur la même ligne axiomatique! Par exemple, nous ne pensons pas que les mesures dites d'aplatissement puissent se fondre dans le même moule. Deux raisons à cela:

1) L'essai d'axiomatisation d'un nouveau type de mesures descriptives faisant appel à la relation $\leq_3$ que l'on a esquissé dans le cadre de $\mathcal{D}$ au paragraphe 11 n'a pas convaincu. Le résultat 11.3 nous dit en effet que l'on ne peut pas caractériser la propriété $F =_3 G$, alors que l'on a pu caractériser les propriétés $F =_0 G$, $F =_1 G$ et $F =_2 G$. Or, l'alignement remarquable dont nous parlons est justement fondé sur la caractérisation de ces propriétés.

2) Si on axiomatisait un nouveau type de mesures descriptives en utilisant une relation $\leq_x$, telle que l'on ait $F =_x G \Longleftrightarrow G = f(F)$, il faudrait, pour que les liens entre axiomatiques persistent, rajouter aux axiomatiques d'une mesure de centre c, d'une mesure de dispersion d et d'une mesure d'asymétrie e présentées dans cet article, de nouveaux axiomes qui déterminent le comportement de $c(f(F))$, $d(f(F))$ et $e(f(F))$ en fonction respectivement de $c(F)$, $d(F)$ et $e(F)$ (comme c'est le cas pour les transformations affines $f(F) = aF + b$)

Ceci nous incite à conclure qu'il existe avant tout trois (et seulement trois) types fondamentaux de mesures descriptives pour résumer une distribution ou un ensemble de données: les mesures de centre, les mesures de dispersion et les mesures d'asymétrie. On retrouve d'ailleurs cette idée dans une technique de statistique descriptive bien connue qui est le Box-Plot (la figure 4 en montre un exemple). En effet, la boîte d'un Box-Plot permet de visualiser simultanément la médiane (une mesure de centre), l'intervalle interquartile (une mesure de dispersion) et le coefficient de Yule (une mesure d'asymétrie) de l'ensemble de données F qu'elle représente:

• Le point noir à l'intérieur de la boîte représente la médiane.
• La longueur de la boîte représente l'intervalle interquartile.
• La position du point noir par rapport au milieu de la boîte caractérise le coefficient de Yule (ce coefficient étant égal à $(b-a)/(b+a)$, où $a = m(F) - Q_1(F)$ et $b = Q_3(F) - m(F)$).

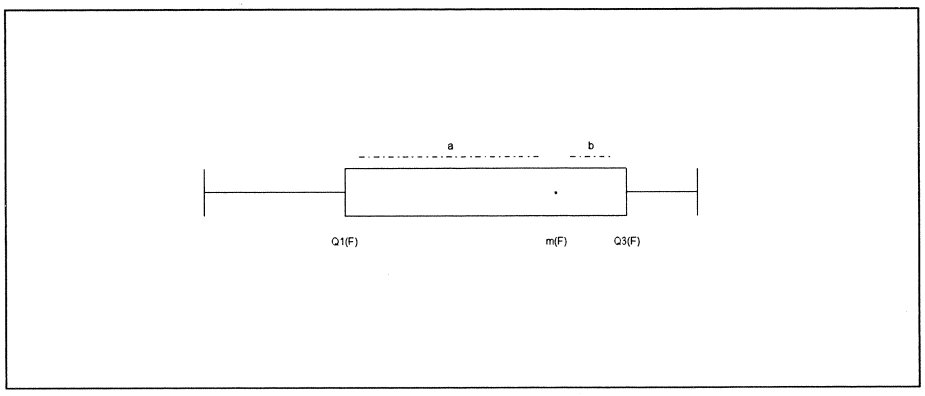


Figure 4: Box-Plot d'un ensemble de données F.

Abstract: This paper deals with the axiomatic definitions of measures of location, dispersion and skewnesss of a distribution. Bickel and Lehmann (1975, 1979) and Oja (1981) have already suggested some axioms to define these concepts. As noticed by Oja (1981), these axioms are found to be strongly related if we restrict our attention to certain continuous distributions. The purpose of this article is to extend these axioms to discrete distributions, and in particular to set of data, and to preserve the axiomatic relationships.

Key words: Affine transformation of a distribution, axiomatic, generalized convexity, measure of dispersion, measure of location, measure of skewness.

Références

[1] Bickel, P.J., and Lehmann, E.L. (1975). "Descriptive Statistics for Nonparametric Models. I. Introduction. II. Location." The Annals of Statistics, 3, 1038-1069.

[2] Bickel, P.J., and Lehmann, E.L. (1976). "Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion". The Annals of Statistics, 4, 1139-1158.

[3] Bickel, P.J., and Lehmann, E.L. (1979). "Descriptive Statistics for Nonparametric Models. IV. Spread". Contribution to Statistics, Jaroslav Hajek Memorial Volume (J. Jureckova Ed.), Academia, Prague, 33-40.

[4] Doskum, K.A. (1974). "Empirical Probability Plots and Statistical Inference for Nonlinear Models in the Two-Sample Case". The Annals of Statistics, 2, 267-277.

[5] Doskum, K.A. (1975). "Measures of Location and Asymmetry". Scand. J. Statist., 2, 11-22.

[6] Groeneveld, R.A., and Meeden, G. (1984). "Measuring Skewness and Kurtosis". The Statistician, 33, 391-399.

[7] Karlin, S. (1968). "Total Positivity". Stanford University Press, Stanford.

[8] Karlin, S., and Ziegler, Z. (1976). "Some Applications to Inequalities of the Method of Generalized Convexity". J. Anal. Math., 30, 281-303.

[9] Mac Gillivray, H.L. (1986). "Skewness and Asymmetry: Measures and Orderings". The Annals of Statistics, 14, 994-1011.

[10] Oja, H. (1981). "On Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions". Scand. J. Statist., 8, 154-168.

[11] Van Zwet, W.R. (1964). Convex Transformations of Random Variables, Math. Centrum, Amsterdam.

Student (1995), Vol.1, No.1

Validation Studies in Epidemiology

Ekkehardt Altpeter

Departement of Social- and Preventive Medicine, University of Berne, Switzerland

Abstract: The aim of this paper is to examine some problems arising in validation studies. An attempt is made to answer the question of whether systematic and random error can be distinguished in the case of validating a new instrument. A rough measure of random error is the correlation coefficient between two repeated measurements of the instrument. Other measures of random error are the coefficient of variation, the reliability ratio and the 'single-to-noise' ratio. The relationships between these measures are evaluated. It is shown that systematic error can be evaluated by the proper choice of regression analysis.

Keywords: Bootstrap, correlation, linear regression, L1-norm, measurement error models, principal component analysis, robustness

1 Introduction

Most measurements in any branch of science have error, and progress often depends on continued improvement of measurement techniques. At some point, however, further reduction of measurement error is impractical or impossible. In epidemiological studies, measurement imprecision is of a particular relevance because of the need for simple and quick procedures which can be performed on a large number of participants. In epidemiology a laboratory test is termed validated if it is accurate and precise.

What is accuracy in epidemiology? When we want to measure alcohol in a blood sample and instead of alcohol the laboratory test measures glucose,

the test is inaccurate. If the test measures alcohol then it is accurate. We say that the laboratory test is specific for alcohol. Now let's say by law we are not allowed to drive a car with an amount of more than 0.05% and the lowest detectable value of alcohol in blood by the test is 0.08%, the test is termed inaccurate too because the laboratory test is not sensitive enough.

What is reproducibility or precision in epidemiology? In natural science an experiment is termed reproducible when it can be repeated under the same conditions. If we let fall a stone out of our hand at time point t_1, it will drop to the ground at time point t_2. On the planet Earth it is always true that $t_1 < t_2$ and hence the experiment is reproducible. The time difference $t_1 - t_2$, however, will vary from experiment to experiment. If the variation of the time differences is small the experiment is precise. Unfortunately, these terms are mixed up in epidemiology and we use reproducibility and precision as synonyms.

In order to apply measurement error models it is essential that studies on reproducibility and validity of the measuring instruments in epidemiological studies are performed. In section 2 the design of an epidemiological study is presented, where data on reproducibility and validity of an instrument (a laboratory test) have been collected.

2 The Short Wave Transmitter Schwarzenburg Study (SWTS)

Schwarzenburg is a village in the PreAlps, 20 km south of Berne. In 1939, the decision was made to construct a short wave transmitter (SWT) with a range of 3-30 MHz, in order to broadcast information from Switzerland to other parts of the world (Radio International Switzerland). People living in the area of the SWT suffer from sleep disorders, neck, back and joint pain as well as from headache. A part of them relate these complaints to electromagnetic fields (EMF) generated by the Transmitter.

There is some evidence that exposure to EMF could lead to sleep disturbances by reducing the secretion of a hormone melatonin. In order to test this hypothesis a single-blinded intervention trial was designed. The basic idea was to follow a sample of 60 persons, 30 with and 30 without sleep disorders from three exposure zones (high, medium and low) during 10 days. In this ten-day period, the SWT was switched off for three consecutive days without informing study participants. During this period the volunteers filled a diary on sleep quality and gave their early morning urine for the determination of 6-Hydroxy-Melatonin-Sulfate (6-OHMS), a metabolite of melatonin. Although we wanted only 60 persons out of 90

persons contacted, 65 agreed to participate in the study.

Under the assumption that 6-OHMS reflects the melatonin secretion (the question of accuracy), there remains the question, if the 6-OHMS measurement is reproducible (the question of precision). In addition a second problem arises due to laboratorial limitations of the 6-OHMS measuring process. It is impossible to measure 65×10 urine samples at once. Because all samples are measured at least twice, 1300 tests have to be made. Our laboratory could perform 72 tests at a time. Let us assume this unit to be a block. The intra-block variation is assumed to be smaller than the inter-block variation. The price for the testing depends on the number of blocks and not on the number of tests.

The 1300 samples can be organized as follows: **Strategy 1:** assigning one urine sample of one person randomly to a block and repeat it in the same block. This strategy allows $72/2 = 36$ samples to be determined at once, that means $650/36 = 19$ blocks must be analyzed. **Strategy 2:** determining all samples of one day once in one block and perform the repetition in a second block. This strategy requires $1300/65 = 20$ blocks have to be determined. **Strategy 3:** the 10 samples of one person including the repetitions are measured in the same block. This allows the performance of $2 \cdot 10 \cdot 3 = 60$ determinations and requires 22 blocks. **Strategy 4:** the 10 samples of one person are assigned to one block, the replication to another. In this case 70 samples can be determined on one block, and hence 19 blocks have to be determined. In 1993 the decision was taken in favor of Strategy 1.

The precision of the measurements using 'Strategy 1' or 'Strategy 3' can be estimated because in each case the two replicates are in the same blocks. We had however to convince the biochemists, the experts in the laboratorial field, that 'Strategy 1' is unbiased because they believe that only 'Strategy 3' will lead to valid conclusions. They argue that only measurement tested at the same time point in the same block will be valid. 'Strategy 1' had been analyzed between January and Mai 1993. During this period the test has been improved in general. Because biochemists believe 'Strategy 3' to be the gold standard, 'Strategy 1' had to be validated. In June 1993 the validation study has been designed. Five randomly assigned persons were selected from the SWTS as follows: the person's urine samples had to be complete, e.g. ten consecutive early urine samples are available, then the participants were sorted according to exposure. Finally a systematic random sample of 5 persons has been taken. This led to a total number of 50 observations. The blocks were replicated according to 'Strategy 3'. Due to this sampling strategy the complete range of possible values of 6-OHMS was not covered. Unfortunately the assignment 'Strategy 1' has not been

replicated in June 93.

The study had to answer the following questions:

- Is the method reproducible ?
- Under the assumption, that 'Strategy 3' is the gold standard, is 'Strategy 1' unbiased ?

A common approach is to calculate the correlation coefficient between 'Strategy 1' and 'Strategy 3' in order to answer the question of reproducibility and to perform least square regression with 'Strategy 1' Y as response and 'Strategy 3' X as explanatory variable. When in the model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \qquad \text{for } i = 1, ..., n$$

β_0 equals zero and β_1 equals one, 'Strategy 1' is considered unbiased.

This paper tries to demonstrate the fundamental difference between the first and the second question, to present different measure of reproducibility as well as their relationship and finally to show the limitations of the common approach.

3 Data

Obs.	Y	e	X	u	ln($Crea$)	Obs.	Y	e	X	u	ln($Crea$)
15-01	4.00	0.32	3.73	0.32	9.38	36-01	3.40	0.21	3.42	0.28	9.50
15-02	4.12	0.11	3.76	0.16	8.75	36-02	3.84	0.04	3.78	0.43	9.41
15-03	3.91	0.06	3.64	0.04	9.04	36-03	4.53	0.04	3.68	0.03	9.52
15-04	3.45	0.09	3.57	0.22	8.97	36-04	3.37	0.13	3.44	0.48	9.39
15-05	4.11	0.35	3.42	0.13	8.87	36-05	3.43	0.05	3.42	0.34	9.52
15-06	3.72	0.41	3.54	0.18	8.60	36-06	2.54	0.98	2.99	0.17	8.94
15-07	4.01	0.03	3.43	0.46	8.50	36-07	3.63	0.12	3.34	0.72	9.48
15-08	5.32	0.22	5.15	0.33	9.06	36-08	3.83	0.18	3.54	0.40	9.49
15-09	4.16	0.05	4.51	0.03	8.41	36-09	3.59	0.19	3.91	0.01	9.51
15-10	3.42	0.03	3.38	0.93	8.31	36-10	3.62	0.02	3.98	0.17	9.63
25-01	3.48	0.11	3.91	0.07	9.08	47-01	2.94	0.39	2.36	0.33	8.72
25-02	4.28	0.38	3.37	0.06	9.15	47-02	4.35	0.08	3.21	0.10	9.37
25-03	4.15	0.22	3.01	0.48	8.72	47-03	3.65	0.27	2.42	0.59	8.98
25-04	4.31	0.12	3.46	0.13	9.07	47-04	3.45	0.34	2.31	0.43	8.65
25-05	2.99	0.48	2.67	0.54	8.23	47-05	3.73	0.20	2.37	0.55	8.70
25-06	3.45	0.02	3.46	0.42	9.50	47-06	3.85	0.03	2.70	0.44	8.87
25-07	3.97	0.08	3.79	0.70	9.41	47-07	3.05	0.22	3.07	0.09	9.06
25-08	3.41	0.32	4.13	0.43	9.52	47-08	3.27	0.07	2.83	0.94	9.29
25-09	3.52	0.12	3.26	0.72	9.39	47-09	3.52	0.17	2.29	0.29	8.52
25-10	1.90	0.35	3.66	0.73	9.52	47-10	2.14	0.18	1.65	0.29	8.18
67-01	3.55	0.03	3.54	0.22	9.32	67-06	3.26	0.09	2.78	0.19	8.80
67-02	2.38	0.07	2.80	0.54	8.99	67-07	3.56	0.12	3.24	0.08	9.80
67-03	4.10	0.17	2.61	0.22	9.12	67-08	3.72	0.15	3.07	0.67	9.26
67-04	4.01	0.08	2.60	0.36	8.95	67-09	2.27	0.20	2.40	0.27	8.36
67-05	3.64	0.05	3.31	0.08	9.38	67-10	3.53	0.33	3.29	0.11	9.53

Table 1: Original Data

The raw data of this validation study are given in Table 1. Strategy 1 is noted Y, it's error e, Strategy 3 is noted X, it's error u. The descriptive statistics are given in Table 2. Sex has been coded in order to obtain a mean of zero. Age ($Year\ of\ birth$ noted [$Y.o.b$]) has been log-transformed. Creatinine is a compound in urine, which was fortunately measured in ad-

	Y	X	$\ln(Crea)$	$\ln(Y.o.b.)$	Sex
Covariance matrix					
Y	$3.65 \cdot 10^{-1}$				
X	$2.43 \cdot 10^{-1}$	$4.19 \cdot 10^{-1}$			
$\ln(Crea)$	$9.20 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$1.78 \cdot 10^{-1}$		
$\ln(Y.o.b)$	$-1.00 \cdot 10^{-2}$	$-2.40 \cdot 10^{-2}$	$9.52 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	
Sex	$5.55 \cdot 10^{-3}$	$-6.58 \cdot 10^{-2}$	$-1.04 \cdot 10^{-1}$	$1.69 \cdot 10^{-2}$	$2.35 \cdot 10^{-1}$
mean	3.67	3.25	9.01	3.57	0.00
median	3.67	3.40	9.05	3.58	$2.34 \cdot 10^{-1}$

Table 2: Descriptive statistics

dition and will allow us to apply instrumental variable estimation describe later in this article. It has been log-transformed (noted $[\ln(Crea)]$). 'Strategy 1' has a slightly elevated mean and median in comparison to 'Strategy 3'. It could be suspected that 'Strategy 3' either additively overestimates the true value or due to the delay of about 3 months to the validation study the activity in the urine samples decreased.

The data are plotted in Figure 1. The dotted line marks the identity line. The scatter towards the upper left corner is more pronounced than towards the lower right one. Either the random error variation in the Y variable is larger than that of the X variable or the relation between X and Y is not linear.

4 Solution

4.1 Reproducibility versus Bias

The question of reproducibility or random error, often called error, and systematic error, often called bias, are different in nature. When hundred bullets are hitting the bull's eye, then systematic and random error are zero. When only 50% of the bullets holes are within the bull's eye and the other 50% surround it by a certain amount then systematic error is still zero and random error larger than zero. When all bullets are reach the bull's eye, but of the neighbors target, then random error is zero and systematic error is large. From this we conclude, that bias and error are not only different in nature, but also independent in principle.

4.2 Measuring Reproducibility

Measuring reproducibility requires to repeat the measurement at least once exactly by the same way at the same time. Let T_{1i} and T_{2i} be the first and

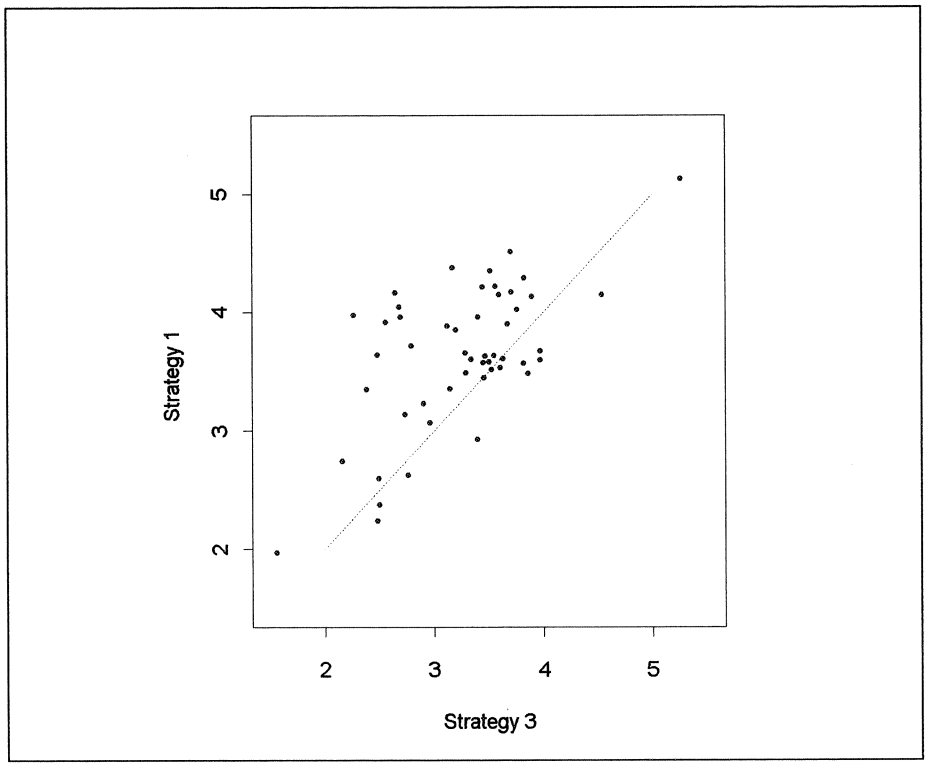


Figure 1: Scatterplott of the original Data

the second independent realization of the same true value t_i and error e_i of $i = 1, ..., n$ measurements. We have:

$$\begin{aligned} T_{1i} &= t_i \pm e_i \\ T_{2i} &= t_i \mp e_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \widehat{t_i} &= \tfrac{T_{1i}+T_{2i}}{2} \\ \widehat{e_i} &= \tfrac{|T_{1i}-T_{2i}|}{2} \end{aligned} .$$

Fuller (1987) proposes the LS estimator for the mean error variance σ_e^2 :

$$\widehat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{2df} \sum_{i=1}^{n} (T_{1i} - T_{2i})^2.$$

If we have two measurements for estimating $\widehat{t_i}$ we have one degree of freedom $df = 1$.

Often precision (reproducibility) is reported as the reliability ratio:

$$\kappa_t = \sigma_t^2/(\sigma_t^2 + \sigma_e^2), \tag{1}$$

where σ_t^2 is the dispersion of the true values.

Let t_i and e_i be independent, then:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \sigma_t^2 + \sigma_e^2 \\ \sigma_t^2 &= \sigma_T^2 - \sigma_e^2 \\ \kappa_t &= (\sigma_T^2 - \sigma_e^2)/\sigma_T^2. \end{aligned}$$

Often error is reported by the 'single-to-noise ratio' A_i or the coefficient of variation $CV(\widehat{t_i})$ defined as:

$$CV(\widehat{t_i}) = 1/A_i = \sqrt{V(\widehat{t_i})}/E(\widehat{t_i}) = \widehat{\sigma_{e_{ii}}}/\widehat{t_i}. \tag{2}$$

A constant $CV(\widehat{t_i}) = \gamma$ for all i implies

$$\sigma_{e_i} = \gamma \cdot t_i$$

and the error variance is no longer constant.

Assuming an uniform random distribution for t_i with $a \leq t_i \leq b$, we obtain

$$\kappa_t(t_i) = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2 + 12\gamma^2 t_i^2}.$$

Because $t_i^2 \geq 0$ implies that the maximum value of $\kappa_t(t_i)$ is achieved for $t_i^2 = a^2$. If a is sufficiently small with respect to b, then $\kappa_t(t_i)$ converges to 1. When t_i converges to b under the same conditions $\kappa_t(b)$ tends to

$$\kappa_t(b) = \frac{1}{1 + 12\gamma^2}.$$

In any case a constant reliability ratio over the examined range of t is desired. In our case, it is known that higher values of t will be obtained with a larger error variance. Therefore we try the log-transformation in order to obtain a constant error variance. After this transformation we can estimate the reliability ratio for 'Strategy 1' and for 'Strategy 3'.

Let $\widehat{y}$ be the estimation of y the true value of Y (Strategy 1) as defined earlier and e be its error then κ_Y can be estimated as follows:

$$\widehat{\kappa}_Y = \frac{\widehat{\sigma}_Y^2}{\widehat{\sigma}_Y^2 + \widehat{\sigma}_e^2} = 0.82.$$

Let $\widehat{x}$ be the estimation of x the true value of X (Strategy 3) as defined earlier and u be its error then κ_X can be estimated as follows:

$$\widehat{\kappa}_X = \frac{\widehat{\sigma}_X^2}{\widehat{\sigma}_X^2 + \widehat{\sigma}_u^2} = 0.94.$$

The gain of efficiency $\widehat{\sigma}_u^2/\widehat{\sigma}_e^2 = 2.84$. Therefore the method has been improved.

A common approach to represent reproducibility in such a case is however to take the correlation coefficient between X and Y, that is r_{XY}. Under the assumption that the areas of X and Y are independent and the true values of x and y are independent of their errors the following relationship holds:

$$\widehat{r}_{XY} = sign(\beta_1)\sqrt{\widehat{\kappa}_X \widehat{\kappa}_Y} = 0.77. \tag{3}$$

As the estimate $\widehat{r}_{XY}$ on the sample is found to be 0.629 we conclude that the errors e and u are not independent.

Although the correlation coefficient between X and Y is low, the reliability ratios are high. It follows that the correlation coefficient is a dangerous measure of reproducibility.

4.3 Measuring validity

If an unbiased measurement procedure X is known, it may serve as a reference for measuring validity or bias. It is often called the gold standard. Regression estimates systematic error. Consider

$$Y = f(X).$$

In validation studies the only accepted function $f(X)$ is a very special function. It follows, that if a statistic can support the hypothesis that $f = f_{H_0}$ is acceptable, then the two variables are identical. Consider

$$Y = \beta_0 + X,$$

and $\beta_0 \neq 0$, then an additive systematic error is present. Instrument Y under- or overestimates the true value, if X is the gold standard. Consider

$$Y = \beta_1 X,$$

and $\beta_1 \neq 1$, then a proportional systematic error is present. The instrument Y overestimates the true value, as long as $Y > 0$ and $\beta_1 > 1$. Consider

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X,$$

and $\beta' \neq (0,1)'$, then a mixture of additive and proportional systematic error is present. The test for $\beta' = \beta'_{H_0} = (0,1)'$, is appropriate, if the relation between X and Y is linear, and it is always multivariate. This requires, that the variance-covariance matrix of β' is known, and adequate hypothesis testing even for small samples, $n \in [20, 100]$, can be performed.

Valid conclusions about systematic error require the proper choice of the regression method. In order to choose the right method several questions have to be answered.

Is the relationship between X and Y linear? If the answer is no, then X and Y are not identical neglecting random error and systematic error is present in it's worst form. The data from the validation study, do not suggest a nonlinear relationship.

Is a gold standard known? In the validation study the gold standard is 'Strategy 3'. Is there any knowledge about the precision as we have seen $\kappa_X = 0.94$ and $\kappa_Y = 0.82$. In this case, according to Draper and Smith (1981) standard methods such as LS, L1 or LMS described by Draper and Smith (1981), Birkes and Dodge (1993), Rousseeuw and Leroy (1987) are adequate. The principle is to

$$\min_{\beta} f(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

In LS this function is $f(Y, x, \beta) = \Sigma_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$, in L1 the function $f(Y, x, \beta) = \Sigma_{i=1}^{n}|Y_i - \beta_0 - \beta_1 x|$ and in LMS the function $f(Y, x, \beta) = med_i\ (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$ (see Draper and Smith (1981), Birkes and Dodge (1993), Rousseeuw and Leroy (1987) for details).

If the precision estimate of X has a $\kappa_X < 0.9$, then measurement error model should be applied, described by Madansky (1959), Fuller (1987) and Cheng and Van Ness (1992). If no prior knowledge about precision exists, then either repeated measurements should be performed on a subsample of size d_f or at least one 'instrumental variable' should be available. An instrumental variable, consistently written as W or $\mathbf{W}$, is a variable that is correlated with one of the explanatory variables and uncorrelated with the measurement errors of Y and X respectively, $\mathbf{X}$ in the multivariate case. The estimation is called 'Instrumental Variable Estimation' (IVE).

If no gold standard is known then a symmetric method as principal component analysis (PCA) is the proper choice, but then the conclusions are fairly limited. We can only conclude, that X and Y are measuring the same thing. (for details see below).

4.3.1 Principles of Error in Variable Models

Consider Y and $\mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a matrix of $n \times p$ explanatory variables,

and y can be explained by a linear combination of $\mathbf{x}$. Then the model is

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{x}\beta, \\ (Y, \mathbf{X}) &= (y, \mathbf{x}) + (e, \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{4}$$

where $\mathbf{x}$ is a $n \times k$-dimensional matrix of explanatory variable and $\epsilon = (e, \mathbf{u})$ is the $n \times (k+1)$ dimensional matrix of measurement errors. The model can thus be written as

$$\mathbf{z}_t \alpha = 0, \qquad \mathbf{Z}_t = \mathbf{z}_t + \epsilon_t \tag{5}$$

with $t = 1...n$, where $\mathbf{z}_t' = (y_t, \mathbf{x}_t), \mathbf{Z}_t = (Y_t, \mathbf{X}_t)'$, and

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+1}) = (1, -\beta').$$

Theorem 1 *Let model (4) and the associated assumptions hold. Let* $\epsilon_t \sim N(0, \sum_{\epsilon\epsilon})$ *be distributed iid, where* $\Sigma_{\epsilon\epsilon} = \Psi_{\epsilon\epsilon}\sigma^2$ *and* $\Psi_{\epsilon\epsilon}$ *is known. Then the maximum likelihood estimators of* β *and* σ^2 *are*

$$\begin{gathered} \widehat{\beta} = \left(\mathbf{M}_{XX} - \widehat{\lambda}\Psi_{uu}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}_{XY} - \widehat{\lambda}\Psi_{ue}\right), \\ \widehat{\sigma}^2 = (k+1)^{-1}\widehat{\lambda} \end{gathered}$$

where $\mathbf{M}_{ZZ} = n^{-1}\Sigma_{t=1}^{n}\mathbf{Z}_t'\mathbf{Z}_t$ *and* $\widehat{\lambda}$ *is the smallest root of*

$$|\mathbf{M}_{ZZ} - \lambda\Psi_{\epsilon\epsilon}| = 0. \tag{6}$$

See Fuller (1987) for the proof.

The main problem is to find an unbiased estimator of $\Psi_{\epsilon\epsilon}$, symbolized as $\mathbf{S}_{\epsilon\epsilon}$. Instrumental variable estimation is a tool for obtaining an estimate of the error-variance-covariance structure.

4.3.2 Instrumental Variable Estimation

When no prior knowledge about $\mathbf{\Sigma}_{\epsilon\epsilon}$ is available, an unbiased estimate of its multiple, $\mathbf{S}_{aa}$, can be calculated by an 'instrumental variable' $\mathbf{W}$, where $\mathbf{W}$ is a $n \times q$ matrix.

Definition 1 Let model (4) hold and let a variable $\mathbf{W}_t$ satisfy

$$\begin{aligned} E\left\{n^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{W}_t - \overline{W})\,(e_t, u_t)\right\} &= (0,0) \\ E\left\{n^{-1}\textstyle\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{W}_t - \overline{W})\,(\mathbf{x}_t)\right\} &\neq 0, \end{aligned}$$

where $\overline{W} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} W_t$. Then W_t is called an instrumental variable for x_t of model (4).

Let

$$Y_t = \mathbf{x}_t\beta + e_t, \qquad \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t, \tag{7}$$

for $t = 1, 2, ..., n$, where $\mathbf{x}_t$ is a k-dimensional row vector of explanatory variables, $(Y, \mathbf{X}_t)$ is observed, and $\mathbf{u}_t$ is the vector of measurement errors. Let a q-dimensional vector of instrumental variables, denoted by $\mathbf{W}_t$, be available, and assume that $n > q \geq k$. Let n and $\mathbf{W}_t$ be such that $\sum_{t=1}^{n} \mathbf{W}_t'\mathbf{W}_t$ is nonsingular, and the rank of $(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{X}$ is of rank k, than an unbiased estimator of $\Psi_{\epsilon\epsilon}$ is

$$\mathbf{S}_{aa} = (n-q)^{-1}[\mathbf{Z}'\mathbf{Z} - \mathbf{Z}'\mathbf{W}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{Z}].$$

The general principle of (6) can then be extended to

$$\widehat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} - \tilde{\gamma}\mathbf{S}_{aa22})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \tilde{\gamma}\mathbf{S}_{aa21}), \tag{8}$$

where $\tilde{\gamma}$ is the smallest root of

$$\left|(\mathbf{Y}, \mathbf{X})'(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - \gamma\mathbf{S}_{aa}\right| = 0.$$

Unfortunately the variance-covariance matrix of $\widehat{\beta}$ is only asymptotically valid (see details in Fuller (1987)). We can apply IVE because we have the informations about creatinine, age and sex which are correlated with 6-OHMS but not with the errors.

4.3.3 Principal Component Analysis (PCA)

Principle component analysis finds a set of standardized linear combinations (SLC) called the principal components, which are orthogonal, and taken together explain all the variance of the original data. The principal components are defined as follows:

Definition 2 If $\mathbf{x}$ is a random vector with mean μ and covariance matrix Σ, then the principal component transformation is the transformation

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \Gamma'(\mathbf{x} - \mu),$$

where Γ is orthogonal. $\Gamma'\Sigma\Gamma = \Lambda$ is diagonal, and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p \geq 0...$. The i^{th} principal component of $\mathbf{x}$ may be defined as the ith element of the vector $\mathbf{y}$, namely as

$$y_i = \gamma_{(i)}'(\mathbf{x} - \mu).$$

Here $\gamma_{(i)}$ is the ith column of Γ, and may be called in the i^{th} vector of principal component loadings [Statistical Science (1994)].

The ratio of the eigenvector related to the largest eigenvalue is an estimator of β_1. No variance covariance matrix for β' has been described until now.

4.4 Statistical Inference

Statistical inference about the parameter vector β is always multivariate. For LS statistical inference even for the case of small sample size is well known [Draper and Smith (1981)], for IVE asymptotic results about $\widehat{\beta}'-\beta'$ have been developed by Fuller (1987). Inference about the eigenvectors have been extensively studied by Anderson (1963) and Flury (1988), but inference about $\widehat{\beta}'=(\widehat{\beta}_0,\widehat{\beta}_1)$ has not yet been developed. For L1 only inference about β_1 in the univariate case has been derived and for LMS no confidence intervals have been suggested. In order to obtain confidence limits for $\widehat{\beta}'$ bootstrapping has been performed on the original data with sampling probability of $1/n$ and replacement. The hypothesis $H_0 : \widehat{\beta}' = (0,1)$ has been tested by applying 2-D nonparametric density estimation and checking whether the point (0,1) is inside the conjoint 95% confidence interval (see Figure 2).

Because biochemists believe 'Strategy 3' to be the 'gold standard' and Repromed, the producer of the laboratory test, claims that the test has a CV of about 10%, it seems to be reasonable to apply standard linear regression. Looking at Figure 1 one remarks two extreme points. It cannot be excluded that robust methods should be applied. In Table 3 the results from the 'standard' computer output are summarized.

Parameter	LS	L1	LMS	IVE	PCA
$\widehat{\beta}_0$	1.739	1.187	4.500	1.287	0.709
$\widehat{\beta}_1$	0.592	0.731	-0.223	0.731	0.909

Table 3: Brut output of different regression algorithms

The values suggests, that the LS, L1 and IVE estimates of $\widehat{\beta}'$ are very similar, whereas the behavior of LMS is frightening, the slope changes the sign. Consider these estimates to be unbiased, then 'Strategy 1' is biased. Because the systematic error is not only additive but also proportional on the log-scale, the scientific conclusions based on measurements according to 'Strategy 1' seem to be dangerous.

IVE is the appropriate regression method under the assumption that X, respectively 'Strategy 3', is the gold standard. The bootstrap density estimates of ${}_b\beta'$, however, are compared to PCA because it is a symmetric method and less assumptions about 'the gold standard' are necessary. Comparing LS and L1 to PCA, the estimates of LS and L1 are unbiased but the variances are not corrected measurement error. This leads to wrong conclusions about systematic error. LS and L1 are confirming the presence of a systematic error, whereas PCA, as IVE and LMS, supports the

hypothesis $H_0 : \beta' = (0, 1)$ (see Figure 2, Table 4).

LMS is the less efficient estimator of all methods and it is biased. Because it is inefficient it will confirm the hypothesis of absence of systematic error. PCA is the most efficient in this situation; because the area of the 95% conjoint confidence region of the PCA is the smallest of all unbiased estimators, but as outlined above the conclusions from PCA are extremely limited (comparing IVE, PCA and LMS).

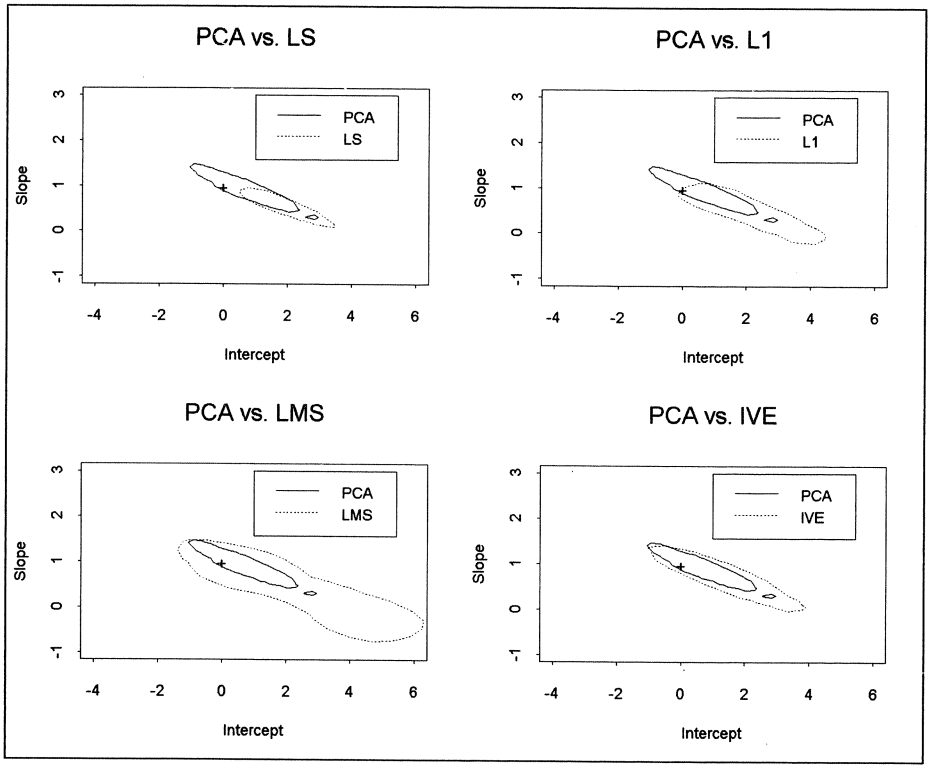


Figure 2: 95% conjoint confidence limits of β (bootstrap)

5 Discussion

The purpose of this study was to answer the major question, whether 'Strategy 1' and 'Strategy 3' are measuring the same realizations of 6-OHMS in early morning urine. Applying methods that do not adjust for measurement error our conclusions could be wrong (see above).

Parameter	LS	L1	LMS	IVE	PCA
$\widehat{\beta_0}$	[0.90;2.70]	[0.54;3.85]	[-1.24;5.14]	[-0.58;3.19]	[-1.04;1.71]
$\widehat{\beta_1}$	[0.24;0.80]	[-0.02;0.91]	[-0.47;1.41]	[0.07;1.23]	[0.55;1.25]

Table 4: 0.95 confidence intervalls (bootstrap)

The other question, whether 'Strategy 1' and 'Strategy 3' are reproducible is easier to answer. After log-transformation the error variance is constant irrespectively, whether X or Y is supposed to be the gold standard. The reproducibility seems to be quite high in both cases ($\kappa_X = 0.94$ and $\kappa_Y = 0.82$).

The bias of the estimator LMS in the present situation is obvious and it is the less efficient. PCA and IVE are according in the conclusions about systematic error. This is well known, as well as the strange behavior of the brut output of LMS [Hettmansperger and Sheather (1992), Birkes and Dodge (1993)]. In any case IVE or methods as PCA in the present situation are the most accurate.

It is important to stress, that the inference about $\widehat{\beta'}$ is always a multivariate test. Why the 2D bootstrap density of PCA leads to a separated isle of 95% area in the range of $\widehat{\beta_0} \in]2,4[$ needs further investigation and might be a hind to the problem of the biasedness of LMS in this situation.

Conclusions: The correlation coefficient is a test for presence or absence of random error. If the correlation coefficient is lower than 0.75, information about replicates is essential. Standard regression methods should be applied with caution in situations where the κ_X cannot be controlled. The knowledge about measurement error models is essential in validation studies. The scatter plot plays a central role in the selection of the regression method and the adequate model. In calibration problems the variable with the lower scatter from the identity line should be selected as the predictor. Principal component is the proper choice whenever a gold standard is unknown and at least the decision has to be taken whether two instruments are equivalent. Inference about the parameter β' is always multivariate.

A Look Into the Future: The development of robust methods for measurement error models (multinormal distribution) has begun only very recently. The extensions to generalized linear models and Cox regression are under development. In this area a lot of work has still to be done.

Acknowledgments. This work has been supported by the grant of the Federal Office of Energy Supply. I wish to thank especially Th. Abelin, M. Egger, J. Lambert, M. Günther and C. Minder (ISPM Bern) for their important input in the area of epidemiology, informatics and for revising the manuscript. The S-code has been written and kindly supplied to the author by M.Maechler (ETH Zürich, Switzerland).

Résumé: Le but de cette étude est de répondre à la question si l'erreur aléatoire et l'erreur systématique se distinguent dans la situation de validation d'un instrument. Les relations entre le coefficient de correlation, le coefficient de variation et le rapport de fiabilité sont analysées. L'erreur systématique s'évalue par les méthodes de régression proprement choisies.

Mots clés: Analyse en composantes principales, bootstrap, corrélation, erreurs de messure, norme L1, régression linéaire, robustesse.

References

[1] Anderson, T.W. (1963). "Asymptotic theory for principal component analysis". Annals of Mathematical Statistics, 34, 122-148.

[2] Birkes, D. and Dodge, Y. (1993). Alternative Methods of Regression, J. Wiley & Sons, New York.

[3] Cheng, C. and Van Ness, J. W. (1992). "Generalized M-estimators for errors-in-variables regression". Ann. Statist, 20, 385-397.

[4] Draper, N. and Smith, H. (1981). Applied Regression Analysis, J. Wiley & Sons, New York.

[5] Flury, B. (1988). Common Principal Components & Related Multivariate Models, J.Wiley & Sons, New York.

[6] Fuller, W.A. (1987). Measurement Error Models, J. Wiley & Sons, New York.

[7] Hettmansperger, T.P. and Sheather, S. J. (1992). "A Cautionary Note on the Method of Least Median Squares". The American Statistician, 46(2), 79-83.

[8] Madansky, A. (1959). "The Fitting of Straight Lines when Both Variables are Subject to Error". American Statistical Association Journal, March, 173-205.

[9] Rousseeuw, P. J. and Leroy, A. M. (1987). Robust Regression & Outlier detection. J. Wiley & Sons, New York

[10] Statistical Sciences (1994). S-PLUS for Windows Version 3.2 Supplement, Seattle: StatSci, a division of MathSoft, Inc.

Student (1995), Vol.1, No.1

Image du "Made in Switzerland"

Hubert Brossard

Groupe de Gestion d'Entreprise, Université de Neuchâtel, Suisse

Résumé: Le secteur des services représente un intérêt considérable pour la Suisse. L'origine "made-in" de ces services peut constituer pour le consommateur, un attribut d'évaluation parfois important. L'étude qui suit a analysé, grâce à l'utilisation de l'analyse en composantes principales, la perception que les leaders d'opinion suisses avaient de cette image "made-in". A partir de treize attributs clés pour un service, l'étude a mis en évidence quatre types de perceptions et a établi une typologie à trois dimensions: l'orientation-métier, l'orientation-client et l'orientation-tradition. Dans une optique managériale, si l'on considère la possibilité d'entreprendre une action commune en vue de promouvoir cette image à l'étranger, il sera nécessaire d'identifier les entreprises cibles pour lesquelles une telle action représenterait un avantage considérable.

Mots clés: Analyse en composantes principales, sondage, test du chi-deux.

1 Introduction

L'étude qui suit cherche à analyser de façon statistique l'image "made-in Switzerland" appliqué au cas des services. Elle a permis d'identifier et d'évaluer treize attributs caractéristiques de l'image des services suisses, de mettre en évidence la présence de quatre types de perceptions de l'image des services suisses et de mesurer l'importance de l'image "made-in Switzerland" dans le comportement d'achat des services suisses.

Le lien existant entre le "made-in" et l'image du produit a déjà fait

l'objet de nombreuses études (voir notamment Nagashima, 1970, 1977; Usunier, 1992). L'impact du pays d'origine sur le comportement d'achat a été étudié tant du point de vue du consommateur individuel que de celui de l'acheteur industriel (Cattin, Jolibert et Lohnes, 1982; pour une revue de la littérature consulter Bilkey et Nes, 1982). L'image, comme critère d'évaluation sera d'autant plus utilisée si l'entreprise ne dispose pas encore d'une grande renommée à l'étranger (Usunier, 1992). Au contraire de plusieurs pays industrialisés qui ont mis sur pied une véritable stratégie marketing de leur image "made-in", la Suisse ne dispose d'aucun instrument. Une telle stratégie aurait pourtant des avantages non négligeables pour les exportateurs helvétiques et ceci principalement pour deux raisons. Premièrement, l'exiguïté du marché national pousse les sociétés suisses vers les marchés extérieurs, où l'image de marque du "made-in" est importante. Deuxièmement, l'exportateur suisse est le plus souvent une entreprise de taille moyenne, dont la notoriété sur les marchés mondiaux est forcément limitée par sa petite taille. Cette situation donne ainsi plus de poids à l'image "made-in" lors du processus d'achat.

Dans le cas de la vente de services, qui constitue une part importante des exportations suisses, le consommateur se trouve face à un bien intangible, parfois difficile à évaluer. L'image nationale représente donc un élément d'évaluation susceptible de sécuriser le client lors de son choix. L'importance du "made-in" comme élément d'évaluation semble se confirmer dans le cas des services suisses. Les résultats du sondage montrent que plus de 80% des personnes interrogées jugent importante, voire décisive l'influence que peut avoir l'image "made in Switzerland" sur le comportement d'achat envers les services suisses. La gestion de l'image liée à la nationalité devient donc un facteur prépondérant pour un pays tel que la Suisse.

2 Méthodologie

Le questionnaire sur lequel repose le sondage a été réalisé sur la base des résultats d'une conférence réunissant plus de cinquante personnalités du monde des services en Suisse. Cette conférence a débouché sur la définition de treize attributs clés d'un service suisse qui ont été retenus pour la suite de l'analyse. L'étude s'appuie sur un outil statistique: l'analyse en composantes principales (ACP) au niveau des variables.

Dans l'optique d'obtenir une évaluation interne de l'image des services suisses, 202 questionnaires ont été envoyés à des personnalités du monde des services en Suisse. Le choix des personnes interviewées s'est

fait sur la base de plusieurs critères de segmentation. La provenance géographique (romands/alémaniques), le secteur d'activité, la taille de l'entreprise répondante (<500/>500 employés), le but de l'organisation (organisation à but lucratif=OBL / à but non lucratif =OBNL) et le regard porté sur les services suisses (interne à l'entreprise/externe à l'entreprise). Suite à deux relances écrites, 102 questionnaires nous ont été retournés et 96 ont été retenus pour l'analyse statistique (taux de réponse 47.52%).

Un test d'homogénéité du chi-deux (χ^2) nous indique que la proportion des répondants est conforme à la répartition des questionnaires envoyés quelque soit le secteur d'activité (valeur calculée: χ^2_8= 3.26, p-value = 0.92) et quelque soit la provenance géographique (valeur calculée: χ^2_1= 0.001, p-value = 0.98).

3 Evaluation des attributs de l'image d'un service suisse

L'importance accordée aux différents attributs a été testée sur une échelle de Lickert à 5 catégories (tout à fait d'accord = 5, plutôt d'accord = 4, neutre = 3, plutôt pas d'accord = 2, pas du tout d'accord = 1). La table 1 présente les moyennes et écarts-types des notes obtenues par les différents attributs.

No	Attributs	Moyenne	Écart-type
1	Précision	4.47	0.56
2	Service de longue tradition	4.41	0.72
3	Fiabilité du service	4.21	0.75
4	Crédibilité	4.18	0.73
5	Qualité excellente	4.18	0.78
6	Sérieux de l'entrprise	4.16	0.69
7	Haut de gamme	4.13	0.74
8	Compétence	4.00	0.76
9	Disponibilité du peronnel	3.24	0.94
10	Coutoisie	3.21	1.03
11	Orientation-client	3.07	1.09
12	Flexibilité	2.73	1.15
13	Service innovateur	2.72	1.09

Table 1: Evaluation globale des attributs

On peut noter que l'écart-type varie de façon inverse à la moyenne. En fonction de la moyenne, on peut observer la formation de deux groupes

d'attributs (voir figure 1). Le premier groupe, constitué d'attributs ayant

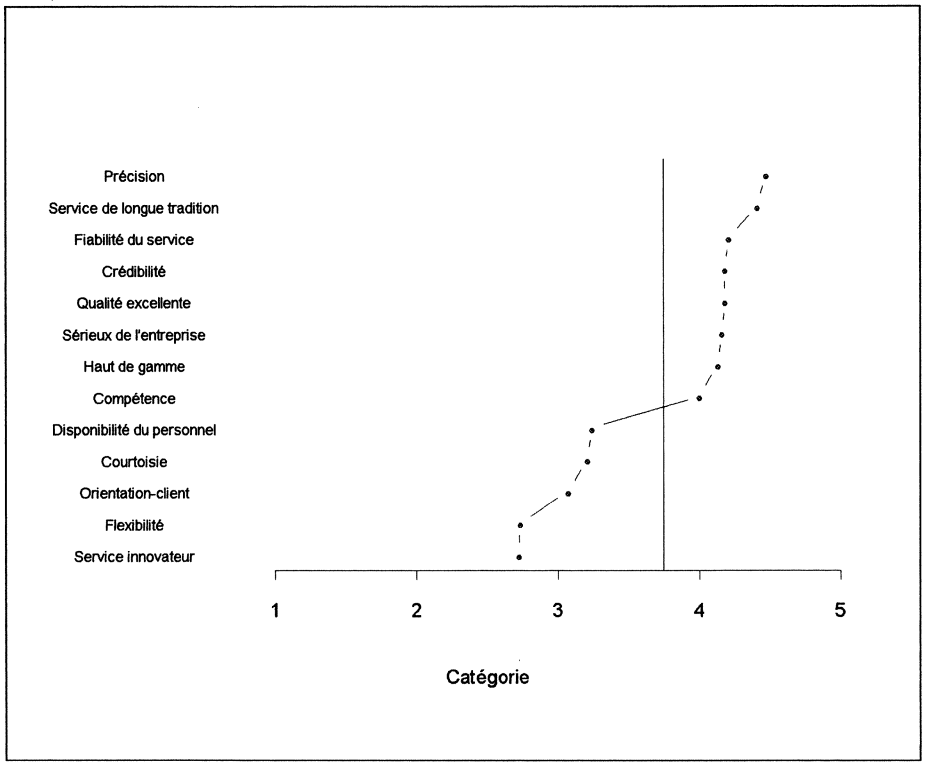


Figure 1: Présentation des attributs sous forme de profil

trait à la notion de "rigueur" obtient de bonnes notes (moyenne > 4) et semble réunir un certain consensus de jugement (écart-type < 0.8). Le second constitué plutôt d'attributs ayant trait à la "souplesse", "l'ouverture" obtient des notes moins bonnes (moyenne < 4) et enregistre une variabilité plus grande (écart-type > 0.8).

Plusieurs tests d'indépendance du chi-deux ont été effectués sur chacun des 13 attributs rapporté aux différents critères de segmentation retenus. L'attribut "qualité excellente" est perçu différemment selon la provenance géographique (les alémaniques accordent plus d'importance à la qualité que les romands, valeur calculée: $\chi^2_2 = 7.07$; p-value $= 0.03$), selon le but de l'organisation (les OBL accordent de manière significative plus d'importance à la qualité que les OBNL; valeur calculée: $\chi^2_2 = 7.57$; p-value $= 0.02$), selon le regard porté sur les entreprises suisses (les internes accordent de manière significative plus d'importance à la qualité que les

externes; valeur calculée: χ^2_2= 10.42; p-value = 0.005).

Les grandes entreprises (> 500) semblent accorder moins d'importance à la tradition que les petites (<500) (χ^2_2= 7.24; p-value = 0.03). La distinction interne/externe bien que n'étant pas significative pour les attributs, nous montre que dans chaque cas, les internes donnent de meilleures notes aux attributs que les externes. Se cache-t-il derrière ces constatations une certaine myopie de la part des internes et une vision plus froide et plus objective des externes? Sur la base des critères de segmentation utilisés, exceptées les différences mentionnées ci-dessus, il n'existe pas de différence significative quant à l'évaluation des attributs.

4 ACP appliquée aux attributs de l'image

4.1 Données initiales et choix des axes factoriels

Sur les 96 questionnaires pris en compte, 89 ont pu être utilisés pour l'ACP, les 7 autres incomplets, n'ont pas été retenus dans le cadre de cette analyse. Le tableau initial comprend 1157 données (89 individus interrogés sur 13 attributs). Il s'agit de données homogènes, puisque chaque attribut a été évalué sur une échelle de Lickert à 5 catégories. L'ACP a été effectuée à l'aide du logiciel "Stat View^{TM} II, v.1.0, 1987, for MacIntosh".

La table 2 nous indique la présence de corrélations entre certaines variables, soit la présence d'éventuelles dimensions sous-jacentes permettant le regroupement des 13 attributs initiaux en un nombre réduit de dimensions.

Attributs	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
Qualité (a)	1.00											
Tradition (b)	0.10	1.00										
Haut de gamme (c)	0.42	0.16	1.00									
Fiabilité (d)	0.43	0.06	0.40	1.00								
Précision (e)	0.47	0.10	0.45	0.37	1.00							
Disponibilité (f)	0.43	0.15	0.27	0.43	0.28	1.00						
Sérieux (g)	0.39	0.03	0.35	0.55	0.32	0.34	1.00					
Compétence (h)	0.49	0.15	0.42	0.42	0.38	0.38	0.60	1.00				
Courtoisie (i)	0.43	0.17	0.29	0.39	0.31	0.65	0.46	0.45	1.00			
Crédibilité (j)	0.56	0.06	0.26	0.41	0.39	0.35	0.58	0.48	0.33	1.00		
Flexibilité (k)	0.47	0.12	0.31	0.46	0.28	0.68	0.42	0.41	0.58	0.47	1.00	
Orientation-client (l)	0.48	0.11	0.06	0.34	0.23	0.63	0.38	0.29	0.56	0.50	0.70	1.00
Innovateur (m)	0.44	-0.02	0.16	0.36	0.26	0.63	0.36	0.32	0.53	0.49	**0.73**	**0.75**

Table 2: Matrice des corrélations

Sur la base du diagramme de Catell, de la règle qui consiste à ne retenir que les facteurs dont le taux d'inertie est supérieur à la quantité 100/p (p = nombre de variables initiales) et sur celle qui ne consiste à ne retenir que les facteurs dont la valeur propre est supérieure à 1, nous retiendrons pour la suite de l'analyse les trois premiers axes qui restituent 65% de la variance totale (axe 1 = 45%, axe 2 = 12% et axe 3 = 8%). (voir table 3).

Composantes	Valeurs propres	Taux d'inertie
Composante 1	5.79	0.45
Composante 2	1.57	0.12
Composante 3	1.08	0.08
Composante 4	0.82	0.06
Composante 5	0.78	0.06
Composante 6	0.59	0.05
Composante 7	0.53	0.04

Table 3: Valeurs propres

4.2 Positionnement des attributs et interprétation des axes factoriels

L'interprétation des axes factoriels ou composantes principales passe par l'identification des attributs les plus corrélés avec les axes retenus lors de la phase précédente et repose en général sur deux indicateurs (voir table 4): les coefficients de corrélation (Cor) et les contributions absolues (%Cor^2).

Le premier axe dispose d'une valeur propre de 5.79 et restitue 45% de l'information. En consultant la figure 2 représentant le premier plan factoriel constitué des axes 1 et 2, on remarque que l'axe 1 regroupe l'ensemble des attributs à l'exception toutefois de l'attribut "service de longue tradition" qui semble jouer un rôle particulier. Chacun de ces attributs est corrélé positivement avec l'axe 1 et participe dans une proportion approximativement semblable à la constitution de cet axe (%Cor^2). Ce premier axe correspond à une évaluation de l'image globale des services suisses, en terme de bonne et de mauvaise image et s'interprète comme une note moyenne donnée au service suisse.

Le second axe dispose d'une valeur propre de 1.57 et restitue 12% de l'information. Il se caractérise par l'opposition entre deux groupes d'attributs. Les attributs "haut de gamme" (%Cor^2=21.58%, voir table 4), "précision" (%Cor^2=11.89%) et dans une moindre mesure "compétence" (%Cor^2 = 8.77%) sont corrélés de façon positive avec le deuxième axe, alors que les attributs "orientation-client" (%Cor^2=15.99%), "service innovateur" (%Cor^2 = 13.89%) et dans une moindre mesure "disponibilité du personnel" (%Cor^2 = 6.69%) et "flexibilité" (%Cor^2 = 6.69%) le sont de façon négative.

Il s'agit d'une opposition nette entre deux groupes d'attributs, ceux caractéristiques d'une "orientation-métier" (qualité excellente, haut de gamme, fiabilité du service, précision, sérieux de l'entreprise, compétence et crédibilité) et ceux caractéristiques d'une "orientation-client" (disponibilité du

Attributs	Cor	Cor2	%Cor2	Cor	Cor2	%Cor2	Cor	Cor2	%Cor2
Qualité	0.72	0.52	8.96	0.18	0.03	2.06	-0.04	0.00	0.18
Tradition	0.17	0.03	0.49	0.12	0.02	0.96	0.87	0.76	70.44
Haut de gamme	0.49	0.24	4.20	0.58	0.34	21.58	0.18	0.03	3.07
Fiabilité	0.66	0.43	7.51	0.25	0.06	3.98	-0.12	0.01	1.33
Précision	0.54	0.29	5.04	0.43	0.19	11.89	0.03	0.00	0.06
Disponibilité	0.75	0.56	9.75	-0.32	0.10	6.69	0.20	0.04	3.74
Sérieux	0.68	0.47	8.09	0.28	0.08	4.89	-0.28	0.08	7.16
Compétence	0.67	0.45	7.73	0.37	0.14	8.77	-0.03	0.00	0.06
Coutoisie	0.74	0.54	9.34	-0.17	0.03	1.84	0.21	0.05	4.20
Crédibilité	0.70	0.49	8.52	0.11	0.01	0.77	-0.30	0.09	8.06
Flexibilité	0.81	0.65	11.25	-0.32	0.10	6.69	0.07	0.00	0.43
Orientation-client	0.74	0.55	9.51	-0.50	0.25	15.99	0.00	0.00	0.00
Innovateur	0.75	0.56	9.62	-0.47	0.22	13.89	-0.12	0.01	1.27
Total		5.79	100		1.57	100		1.08	100

Table 4: Corrélations des attributs avec les facteurs

personnel, courtoisie, flexibilité, orientation-client et service innovateur). Une telle distinction avait déjà été mise en évidence au travers du tableau des notes moyennes obtenues par les attributs (table 1).

Le troisième axe dispose d'une valeur propre de 1.08 et restitue 8% de l'information. Il est fortement lié à l'attribut "service de longue tradition" (Cor = 0.87; $\%Cor^2 = 70.44\%$) et nous permet d'introduire une dimension supplémentaire à la typologie d'attributs ébauchée ci-dessus (orientation-métier, orientation-client et orientation-tradition).

4.3 Interprétation des plans factoriels

Le premier plan composé des axes 1 et 2 nous offre une représentation moyenne de la position des attributs puisqu'il restitue 57% de la variance (axe 1 = 45% et axe 2 = 12%), soit de l'information initiale.

Les variables ayant la qualité de représentation la plus élevée sur ce plan factoriel sont les attributs "orientation-client" (Cor = 0.55 + 0.25, voir table 4), "service innovateur" (Cor = 0.56 + 0.22) et "flexibilité" (Cor = 0.65 + 0.10). Sur la figure 2, on distingue les deux groupes d'attributs caractéristiques de "l'orientation-métier" et de "l'orientation-client" décrits précédemment.

Le second plan factoriel restitue 53% de la variance (axe 1 = 45% et axe 3 = 8%). La représentation graphique n'apportant pas d'éléments nouveaux, nous avons choisi de ne pas représenter ici ce second plan factoriel. L'élément à retenir tient au troisième axe, déterminé presque exclusivement par l'attribut "service de longue tradition" qui contribue pour plus de 70% à la constitution de l'axe ($\%Cor^2 = 70.44\%$).

4.4 Projection des individus

Une seconde représentation graphique consiste à représenter les individus dans les deux plans factoriels obtenus. Les coordonnées de chaque individu sont faciles à calculer, puisque les facteurs calculés précédemment ne sont que des combinaisons linéaires des 13 attributs de départ. Les coordonnées

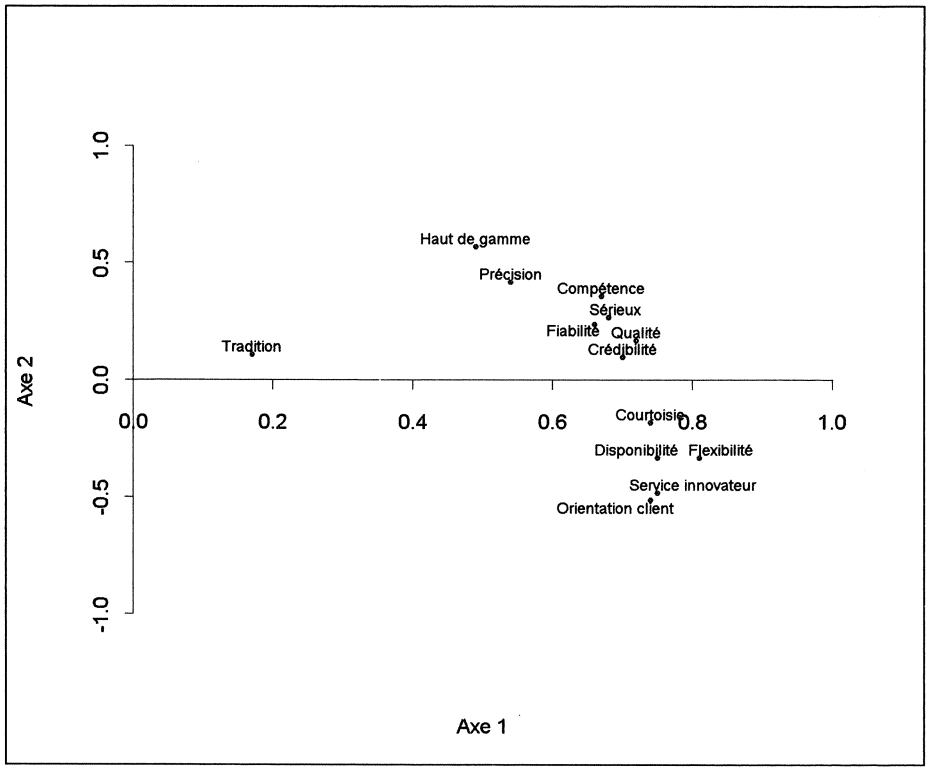


Figure 2: Projection des variables sur le premier plan factoriel

peuvent être calculées à l'aide de la relation suivante:

$$F_\alpha(i) = \sum_{j=1}^{13} a_{\alpha j} X_j$$

où $F_\alpha(i)$ est la coordonnée sur l'axe factoriel α de l'individu i, $a_{\alpha j}$ est le coefficient (coefficient vecteurs propres) sur l'axe factoriel α de l'attribut X_j (j correspondant au numéro de l'attribut) et X_j est la valeur centrée réduite donnée par les individus à l'attribut X_j.

Une analyse préalable du jeu de données, à l'aide de méthodes de classification automatiques (hiérarchiques et non hiérarchiques), complétée par une lecture visuelle minutieuse ont montré que nos données (constituées d'entiers) sont assez regulièrement reparties dans le cube de dimension 13, {1, 2, 3, 4, 5} x ..... x {1, 2, 3, 4, 5}.

Cette structure est confirmée par les résultats de l'ACP, lorsque l'on considère les individus. En effet, dans le cas où un échantillon est distribué de façon regulière dans un cube, les composantes principales seront

générées par les diagonales du cube. La première composante sera associée à la plus grande diagonale portée par la droite passant par les points, dans R^{13}, (1,....., 1), (5,....., 5). Cette situation est nettement confirmée par la figure 3. La structure du cube projeté sur le premier plan factoriel apparaît sous la forme d'un parallélépipède, avec une concentration (attendue) plus importante des points au centre.

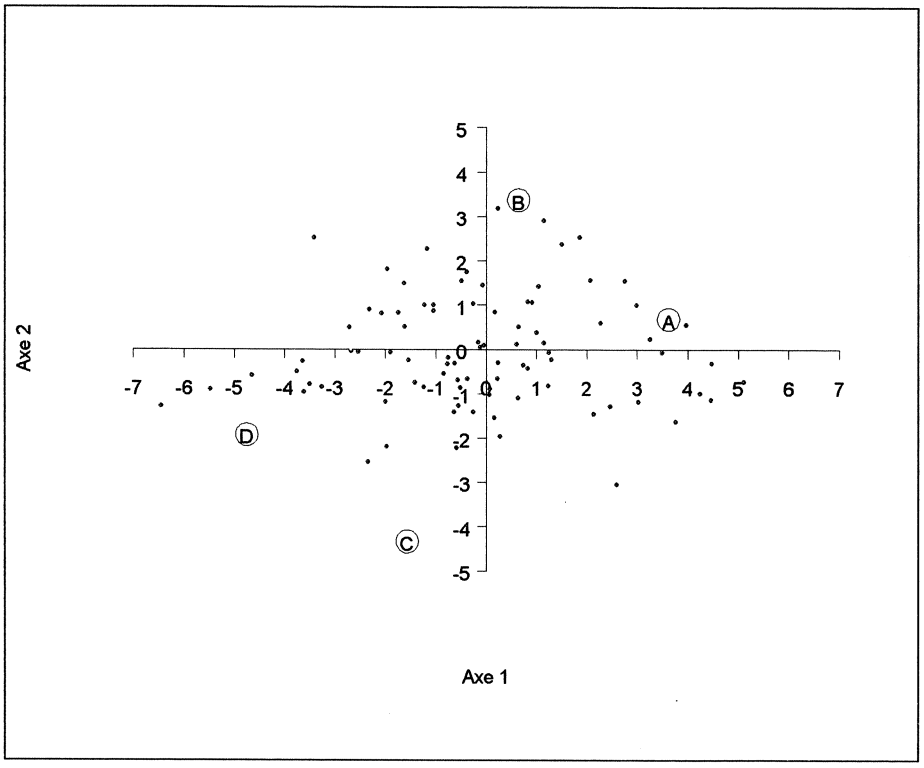


Figure 3: Projection des individus réels et fictifs sur le premier plan factoriel

Afin de renforcer nos propos, nous avons positionné sur le premier plan factoriel, quatre individus fictifs, chacun caractéristique d'un jugement type de l'image des services suisses.

• Individu A = Optimiste: Individu ayant une très bonne image des services suisses. Il pense que les services suisses ont une très bonne orientation-métier et une orientation-client un peu moins bonne.

• Individu B = Réaliste: Individu ayant une bonne image des services suisses. Il pense que les services suisses ont une très bonne orientation-métier et une orientation-client très faible.

• Individu C = Neutre: Individu ayant une image moyenne des services suisses. Il pense que les services suisses ont une mauvaise orientation-métier et une assez bonne orientation-client.

• Individu D = Pessimiste: Individu ayant une très mauvaise image des services suisses. Il pense que les services suisses ont une mauvaise orientation-métier et une très mauvaise orientation-client.

Nous avons affecté à chaque individu fictif une note pour chaque attribut. Les notes qui se trouvent dans la table 5 correspondent aux catégories de l'échelle de Lickert définies précédemment et non aux coordonnées des individus dans les graphes.

Individu/Attribut	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Individu fictif A	5	5	5	5	5	4	5	5	4	5	4	4	4
Individu fictif B	5	5	5	5	5	2	5	5	2	5	2	2	2
Individu fictif C	3	5	3	3	3	4	3	3	4	3	4	4	4
Individu fictif D	3	5	3	3	3	2	3	3	2	3	2	2	2

Table 5: Coordonées des individus fictifs: centres initiaux

Chaque individu peut être projeté sur le plan factoriel (voir figure 3). Comme prévu, les individus fictifs A et D sont positionnés de façons trés claire aux deux extremités du premier axe factoriel et sont trés proches de cet axe.

5 Conclusion

Comme semble le démontrer l'enquête, l'image joue un rôle non négligeable sur le comportement d'achat des consommateurs dans le domaine des services. De l'ACP, trois composantes, identifiées à partir de 13 attributs caractéristiques de l'image des services suisses, semblent se dégager: l'orientation-métier, l'orientation-client et la tradition. Les points forts caractéristiques de l'image des services suisses se rapportent avant tout à la dimension "orientation-métier", alors que les attributs considérés comme les plus faibles se rattachent à la notion d' "orientation-client".

Dans la perspective du lancement d'une action commune en faveur du "made-in Switzerland", la mise en évidence des différentes perceptions de l'image nous suggère qu'il sera nécessaire d'identifier les entreprises pouvant être intéressées par de telles actions. Le sondage comprenait une partie concernant des propositions d'actions communes envisageables. Ces propositions n'ont pas enregistré un grand succès auprès des répondants, à l'exception de la création d'un logo d'une part et l'organisation d'une école suisse de la qualité d'autre part.

Abstract: The service sector represents a considerable interest for Switzerland. The "made-in" origin of these services can sometimes constitute an important evaluation attribute for the consumer. The following study shows the perception of Swiss opinion leaders about this "made-in" image, using the principal component analysis. From thirteen key-attributes for a service, the study has pointed out four types of perceptions and has established a three - dimensional typology: the profession-orientation, the client-orientation and the tradition-orientation. From a managerial point of view, if we consider the feasibility of undertaking a joint action in order to promote this image abroad, it will be necessary to identify the target companies for which such an action would represent a considerable advantage.

Key words: Chi square test, principal component analysis, survey.

Références

[1] Bilkey, W.J. and Nes, E. (1982). "Country-of-Origin Effects on Product Evaluations". Journal of International Business Studies, Spring/Summer, 89-99.

[2] Cattin, P., Jolibert, A. and Lohnes, C. (1982). "A Cross-Cultural Study of "Made-In" Concepts". Journal of International Business Studies, Winter, 131-141.

[3] Nagashima, A. (1970). "A Comparison of Japanese and US Attitudes towards Foreign Products". Journal of Marketing, 34, 68-74.

[4] Nagashima, A. (1977). "A Comparative "Made-In" Product Image Survey among Japanese Businessmen". Journal of Marketing, July, 95-100.

[5] Usunier, J-C. (1992). Commerce et culture: une approche culturelle du marketing international, PUF, Paris.

Für die Mitglieder unentgeldlich. Abonnementspreis 6 Fr. jährlich. Fr. 6. 50 franco durch die ganze Schweiz. Bestellung bei allen Buchhandlungen und den schweizerischen Postbureaux.

Gratis pour les membres de la Société. Prix d'abonnement 6 Fr. par an. Fr. 6. 50 franco pour toute la Suisse. On peut s'abonner chez tous les libraires et aux bureaux de poste suisses.

Zeitschrift für schweizerische Statistik.

JOURNAL DE STATISTIQUE SUISSE.

Herausgegeben von der schweiz. statistischen Gesellschaft unter Mitwirkung des eidgen. statistischen Büreau's.
Publié par la Société suisse de statistique avec le concours du Bureau fédéral de statistique.

Bern. Nro. 1. *Januar 1865.*

Wer ohne bereits Mitglied oder Abonnent zu sein, diese Nummer zugesandt erhält, ist gebeten, sich baldigst in der einen oder andern Eigenschaft einschreiben zu lassen, oder die Nummer zu refusiren.

Ceux qui recevront ce numéro sans être jusqu'à présent membres de la Société ou abonnés au Journal, sont priés de s'inscrire sans retard, sous l'un ou l'autre de ces titres, ou de refuser ce numéro.

Inhalt. Aufruf zur Bildung von Sektionen. *Invitation en vue de la formation de sections.* — Statuten für die Sektion Bern der schweiz. statistischen Gesellschaft. — Die amtliche Statistik des Kantons Bern und das Verhältniss der kantonalen statistischen Gesellschaft zu derselben, von Hrn. Reg.-R. Kurz. — Cours élémentaire de statistique, par M. le Dr A. E. *Cherbuliez*, professeur d'économie politique et de statistique à l'Ecole fédérale polytechnique à Zurich. — Das Unterrichtswesen des Kantons Basel-Stadt, von Hrn. Prof. H. Kinkelin. — Die schweiz. Gesetzgebung betreffend die Fabrikarbeit. Zusammengestellt von der Kanzlei des eidg. Departements des Innern. — Die Postersparnisskassen in England, von J. L. Spyri, Pfr. — Litteratur. — Verzeichniss der von den h. Kantonsregierungen der schweiz. statistischen Gesellschaft für das Jahr 1865 bisher zugesicherten Beiträge.

Aufruf zur Bildung von Sektionen.

Es haben sich bisher definitiv konstituirt die Sektionen *Genf* mit 24, *Bern* mit 52 und *Appenzell I.-Rh.* mit 6 Mitgliedern. *Zürich* mit 54 und *Aargau* mit 37 Mitgliedern sind in der Konstituirung begriffen. Noch in einer Reihe von Kantonen hat sich ebenfalls eine genügende Anzahl von Mitgliedern eingeschrieben, um zur Bildung von Sektionen schreiten zu können. Wir ersuchen hiemit dringend, die Gründung derselben nicht länger hinauszuschieben, und um Anzeige von der erfolgten Konstituirung an das Centralkomite. Wo nur vereinzelte oder noch gar keine Mitglieder vorhanden sind, da, hoffen wir, werden Männer, welche die Bedeutung der Statistik für die Staatsverwaltung und Wissenschaft zu schätzen wissen, sich's, wie dies jüngst im Kanton Aargau der Fall gewesen ist, zur angelegentlichen Sorge machen, dass ihr Kanton im schweizerischen Verbande gebührend repräsentirt sei.

Erst in den Sektionen kann unser Verein seine rechte Thätigkeit entwickeln. Ohne Sektionen könnte das Centralkomite wenig machen; denn es ist nöthig, dass die wichtigeren allgemeinen Aufgaben des Vereins in den Sektionen vorberathen werden; es ist ferner dringend zu wünschen, dass die Sektionen sich bald allerorten und mit Fleiss daran machen, eine vollständige Statistik ihrer engern Heimat, ihres Kantons, zu gewinnen und fortzuführen.

Invitation en vue de la formation de sections.

Dans plusieurs Cantons des sections de la Société suisse de statistique se sont déjà constituées définitivement, ce sont: *Genève* avec 24 membres, *Berne* avec 52 membres, et *Appenzell Rh. int.* avec 6 membres. Les sections de *Zurich* avec 54 membres et d'*Argovie* avec 37 membres s'organisent actuellement. Dans d'autres Cantons les membres de la société sont en nombre suffisant pour pouvoir former des sections; aussi les invitons-nous instamment à se réunir le plus tôt possible, et à en donner connaissance au Comité central. Quant aux contrées où il n'y a que peu ou point de membres de notre société, nous sommes convaincus, qu'ainsi que cela s'est vu dans le Canton d'Argovie, il s'y trouvera des gens éclairés, sachant apprécier dans toute sa valeur l'importance administrative et scientifique de la statistique, et tenant à ce que leur Canton soit dignement représenté dans notre association.

Ce n'est que par les sections que notre société peut arriver à développer toute son activité, car, sans sections, l'action du Comité central se réduit à peu de chose. Il faut que toutes les questions d'importance générale soient préalablement discutées au sein des sections; puis il est à désirer que, partout, les sections s'occupent à réunir et à compléter les matériaux de la statistique particulière de leurs Cantons respectifs.

In January 1865, the *Société suisse de statistique*, with the help of the Bureau fédéral de statistique, publishes the first issue of the *Journal de statistique suisse.*

In 1916, at the time of its 52nd year of publication, the journal is renamed *Journal de statistique et Revue économique suisse*.

Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik

Revue suisse d'économie politique et de statistique

81. Jahrgang — 81e année

1945

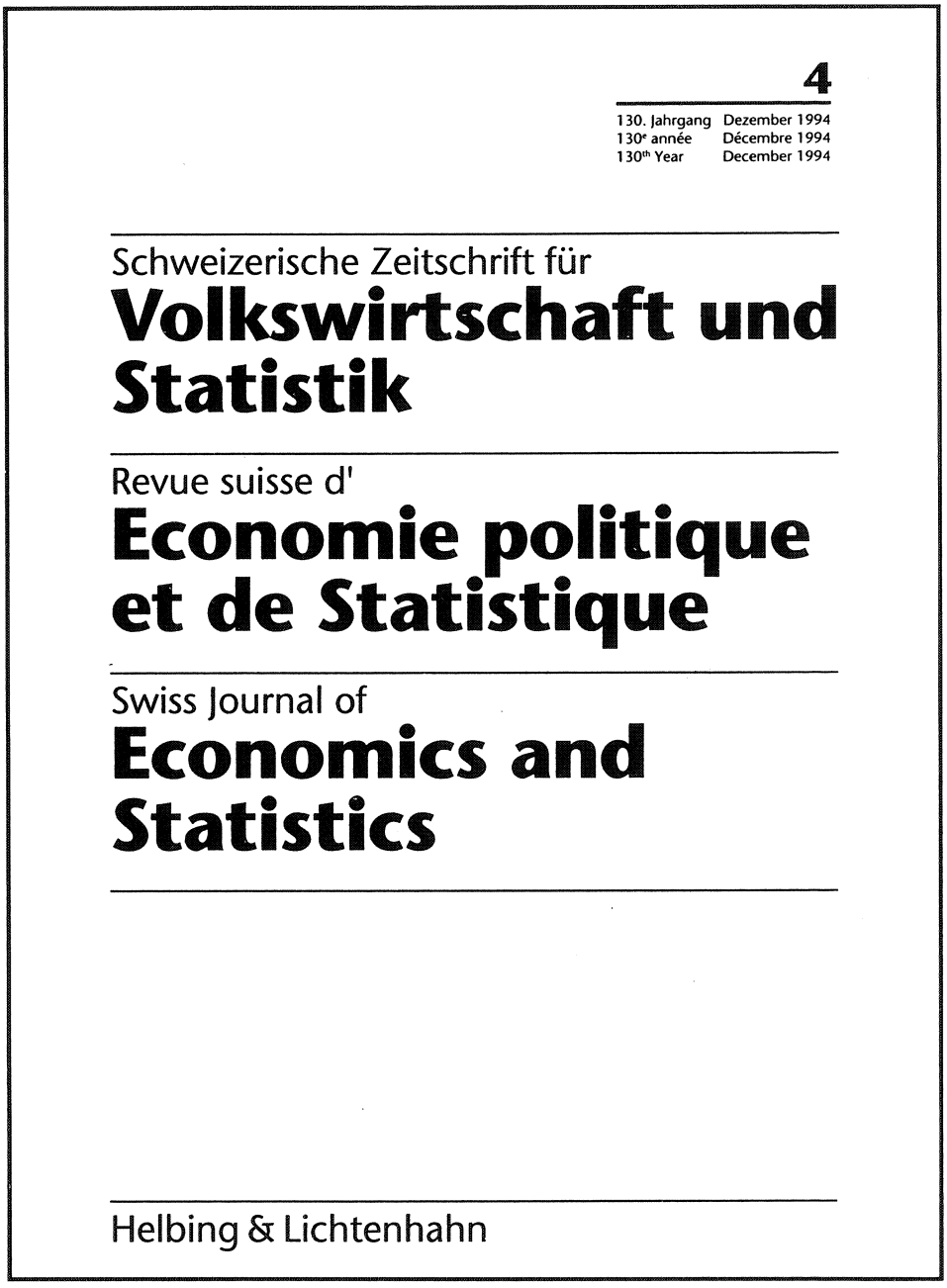
Herausgegeben von der
Schweizerischen Gesellschaft für Statistik und Volkswirtschaft

Publiée par la
Société Suisse de statistique et d'économie politique

Redaktion
Prof. Dr. V. F. Wagner, Basel

Druck, Spedition und Ausgabestelle für den Buchhandel – Imprimé et expédié par
STÄMPFLI & CIE., BERN
Printed in Switzerland

In 1945, the journal is again renamed *Revue suisse d'économie politique et de statistique*.



In 1994, the journal is still published under the name of *Revue suisse d'économie politique et de statistique*.

STEFANO FRANSCINI (1796-1857)

FOUNDER OF OFFICIAL STATISTICS IN SWITZERLAND

Considered as the "father of official statistics in Switzerland", Stefano Franscini was born in Low-Leventin, in the poor village of Bodio in Tessin where he spends his childhood as a shepherd. At an early age he begins informal training for a religious career with a priest from the neighbouring village.

In 1815, he enters Milan's seminary where he pursues his philosophical and theological studies. Although he is ordained, after only three years of priesthood he starts a new career in elementary teaching. Returning to Tessin, he opens a school for mutual teaching.

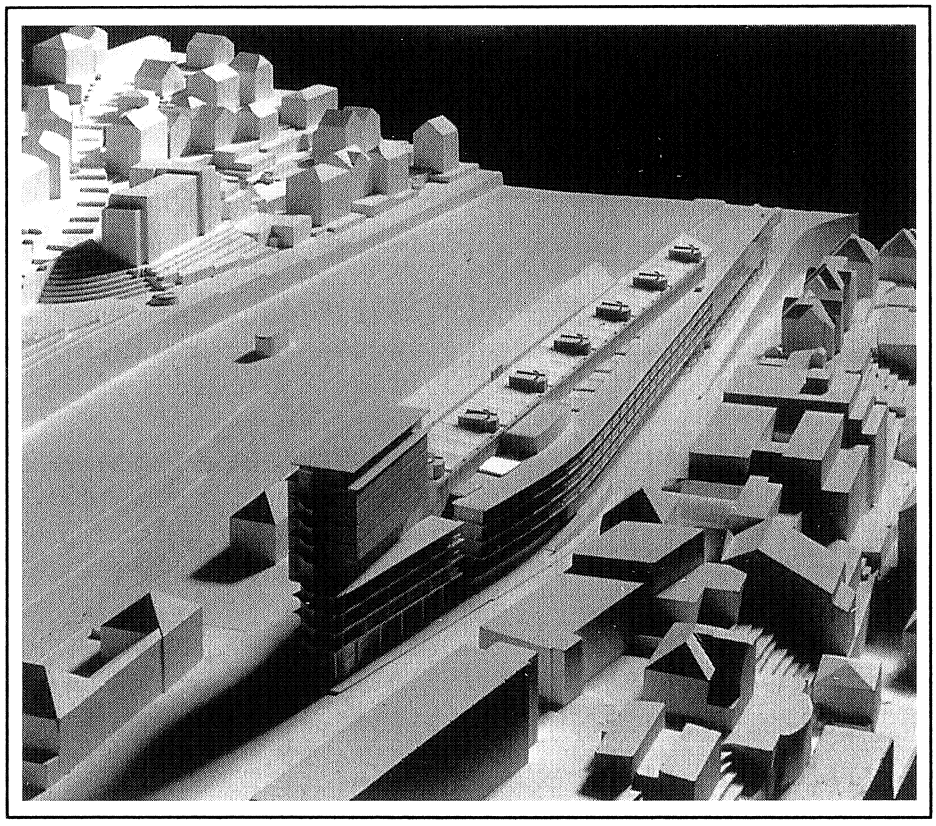
In 1830, he enters political life as a magistrate in Tessin where he contributes to the development of public instruction, his main interest. He publishes a series of books on education and other didactic works. Fascinated by public matters, he creates in 1833 the "Tessinese Public Utility Society".

In 1841, he represents Tessin at the "Diete". This opens a new career of external politics. He travels frequently to Milan and Napoli to defend Switzerland's interests. In 1848, he becomes deputy of the National Council, and the same year is elected Federal Minister. He then creates Swiss statistics as a branch activity of his Interior Ministry, though he disposes neither of an organism nor a budget for this activity. Franscini himself, with the help of his secretary, copies by hand all the statistical tables during the 1850 census. The results of this work were published in five volumes by the Ministry under the name of "Contributions to the Confederation's Statistics ", Bern 1851-1857.

In 1827, he publishes in Lugano "Statistics of Switzerland". This work, in fifteen volumes, which can be found at the Federal Statistics Office's

library, is an excellent source of information and contains a very global and synthetic vision of Switzerland. These volumes include a series of numerical tables compiled by Franscini describing the climate and topography of Switzerland. The tables are comparable to those of other countries dating from the same period. They also provide information on the population, the industry by branches of activity, agriculture, commerce and social life. He also regroups data describing the different regions of Switzerland. The tables are accompanied by descriptive texts which include historical and cultural information.

Franscini died in 1857. Three years after his death the Federal Bureau of Statistics (now called the Federal Office of Statistics) is born.



On March 18, 1992, the Swiss Parlement voted in favour of the installation of the Federal Office of Statistics in the city of Neuchâtel. The office will be moved to Neuchâtel before the turn of the century. The photo (l'Express) shows the model of the future building.

Honoring Peter J. Huber

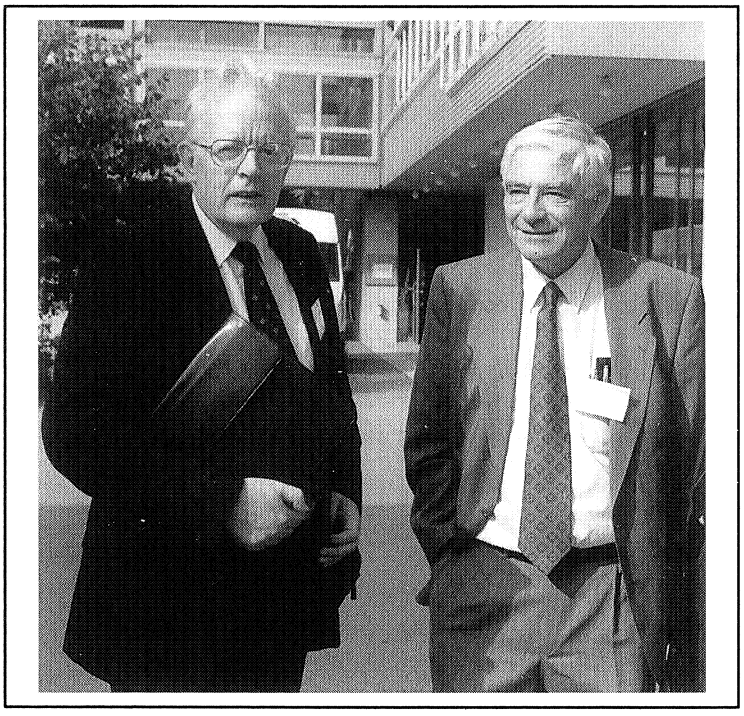
Peter J. Huber, Professor of Statistics in the Department of Mathematics at Bayreuth University, Germany, received the Honorary Degree of Doctor in Economical Sciences from the University of Neuchâtel, at the occasion of Dies Academicus on November 5, 1994. The citation reads: "For his contribution to the Statistical Science and in particular to the development of robust theory and data analysis".

Peter J. Huber receiving his title from the rector Denis Maillat.

Professor Huber was born in Wohlen, Switzerland on March 25, 1934. He obtained his Ph.D from the Swiss Federal Institute of Technology in Zürich where he was awarded the silver medal for the scientific quality of his thesis. In 1964 he was appointed Professor of Mathematical Statistics at the Swiss Federal Institute of Technology in Zürich. He later went to the United States' most prestigious universities in the capacity of visiting professor at Princeton, Yale, Cornell, Harvard and Berkeley. In 1977, he was appointed Professor of Statistics at Harvard University, then Professor of Applied Mathematics at the Massachussetts Institute of Technology. He is currently Professor

of Statistics at the University of Bayreuth in Germany. He married Effi Buser in 1959 and has two children.

Peter Huber is an internationally renowned statistician. He is a member of the American Academy of Arts and Sciences, as well as the Bernoulli Society and the National Science Foundation in the United States, which has very few foreign members. Among his numerous achievements to date, Dr. Huber received the Humboldt Award in 1988; he was named Wald Lecturer at the IMS Annual Meeting in 1972, and was awarded the NSF Senior Foreign Scientist Fellowship in 1970-71. He is considered to be the founder of robust statistics. His article in 1964 entitled "Robust Estimation of a Location Parameter" served as an inspiration for many scientists and is an important reference in this field of statistics. He is certainly the person most often cited in the statistical literature in the last 30 years. Professor Peter Huber is the author of an impressive list of books and articles in various fields of statistics. The Interactive Scientific Processor (ISP) software he developed was a revolution in statistical software and had a strong impact on progress of statistics.



Peter J. Huber (on the right) with Sir David Cox during the "26èmes Journées de Statistique" congress in Neuchâtel, May 1994.